FRANCISCI VIETÆ

VARIORVM DE REBVS MATHEMATICIS RESPONSORVM, LIBER VIII.

Cuius præcipua capita ſunt,

De duplicatione Cubi, & Quadratione Circuli.



TVRONIS,

Apud IAMETTIVM METTAYER, Typographum Regium.

1593.

I. V. FRANCISCO VIETAE
LIBELLORVM REGIORVM MAGISTRO
PET. DA. A. S. P.
S.

MIRATVS ſum V. I. quid eſſet quod hiſce diebus ad nos perferretur, non iam doctorum virorum ſermone, ſed etiam infimæ plebis conſentiente voce, Turoni magnum agitari in Mathematicis certamen, & de rebus in eâ diſciplinâ omnium difficillimis, imò & antiquorum & recentiorum iudicio impoſsibilibus: hoc eſt de circulo in quadratam figuram reuocando, & duplicando cubo: quæ res vt priſcorum illorum Platonis, Ariſtotelis, Archimedis, & aliorum exercita habuit ingenia, ita noſtrorum proculdubiò miſerè, & anxiè adeò torſit mentes, vt iam & horum & illorum ſuffragio, & calculo, res magis apta ad aperienda Matheſeos penetralia, quàm ad reperiendi ſpem excogitata videatur. At memineram certè cùm pro tuâ quâ es in probos & literatos omnes beneuolentia, mihi ad te aditum faceres Lutetiæ, à multis iiſque præſtantibus, cùm Galliæ tum aliarum nationum Mathematicis, tanquam oraculum certiſsimum, multa de ſubtiliſsimis excellentiſsimæ diſciplinæ nodis & ambagibus rogareris, iis dum tuæ dignitatis nulla habita ratione faciebas ſatis, mihi idem illud inter cæteros de te quærenti: an quod tunc opinione doctiſsimorum Mathematicorum fieri non poſſe iudicabatur, nunc verò mulierculàrum & mediaſtinorum vana deliria vnius pollicitatione pendentia fieri ſperent, omnino artis certiſsimis demonſtrationibus perfici poſset, negare te κατὰ τὴν τεχνικὴν, ſed κατὰ τὴν μηχανικὴν poſse fieri. Sanè verò præſtantes & ſine fuco doctos omniumque ſententia graues Mathematicos, ingenij tui, & non vulgaris doctrinæ laudatores & admiratores, omnibus, ac mihi etiam ſciſcitanti, idem reſpondiſse. recordabar. Quid igitur inquiebam, tot tantoſque omnium ſeculorum continuâ ſerie viros ea de re ſpem abiecisse, quæ nunc quilibet è fæce vulgi ſperet conſtanter? Ac profectò inquirenti diligentius. vnde tam certa ſpes incertæ rei duceretur; reſponſum eſt, ab Epigrammatis cuiuſdam græci, à duobus aut eo etiam amplius annis manibus omnium triti, magni & toto orbe notiſsimi viri hiatu, & furtiuorum epigrammatum geminatis promiſsionibus cunctos ſuſtineri. Sed poſtquam inflatum & turgidum epigramma græcum duplicandi cubi promiſsorem emiſiſse, necnon & alia latina, cum omnibus non modò Gallis, ſed etiam Batauis extremis, & fortè Italis, Alpibus ſuperatis communicaſse audiui: non potui non dolore tanti viri vicem, quem ſibi imperium & tyrannidem in litteris ſuo ſibi iure vindicare libri eius loquuntur, eum inquam certiſsimam regum, ſi diis placet, progeniem, quem in reciperandis à Othonibus, vt pater eius, querebatur, Ducatibus, & ampliſsimis poſseſsionibus & ditionibus, ſibi atauiſque ereptis, à fortuna derelictum videbam: & ne ab eodem in hoc ſecundo ab illorum principatu litterarum deſereretur, verebar. Quanquam pericula, & fortunæ aleam in vtroque imperio non formidare occurrat eum, qui tam multa ſæpe & periculo ſuo, in auctoribus bonis, ac populari præſertim ſuo reſtituere, & diuinare ſe vulgo prædicat, qui verſus & paginarum longum ordinem inuertendo, permutando, & mutilando, tam miſerè fœdaſset, vt ſæpius diuinationes, ne dicam ſomnia, quàm auctorum ſententiam legere cogamur. Hoc autem gradu quis regnum litterarum obtineri, aut ſeruari poſse credat? Hoc idem ille ſi in Mathematicis *falsò perſuaſus tentet: haud dubitem, præeuntibus tam multis, & dolendis in Manilium erroribus, qui vel à tyrone huius artis non niſi ferulæ propoſita pœna committi potuerunt: de contactibus ma-*

gnorum circulorum, qui ſe profectò interſecant, non etiam contingunt, de nodis lunaribus, & aliis innumeris in eo libro erroribus, quos ſi tu in grauioribus, & pro repu. ſubeundis laboribus & occupationibus, dies aliquot velles diffindere, nullo negotio perſtringeres. Quin iam & Manilium, & Manilij amantes eum demereri poſſe, qui vulnera quibus tum ipſe tum adiuncta ſcholia ſcatent curauerit, ita vt infelices ad vulnera potius infligenda quàm ſananda, manus admouiſſe credatur qui in indicio aſtrorum, puſillũ in ea Mathematices partę iudicium ſuum panderit. Vt ſi quando de ſua κυκλοπαιδίᾳ concepta opinio eum impulerit: nihil aliud quam coniectanea, quàm emendationes; quàm ſcholia editurum ſit vero ſimile. Nec tamen, pro iam ſibi imaginaria regni opinione quæſita, in omnes, qui aliter ac ille ſenſerint in rebus Mathematicis, maledicta, probra & contumelias non vibraturum, quod epigrammate quodam iam audio ipſum feciſse. Verumenimuero haud dubito te rectè iudicaturum, intereſse Reip. ne hominum id genus audax, vt libros & auctores, ſic bonorum, & illuſtrium virorum nomen pungat, & notis inurat. Te vnum cui iam ſat noſtrates, & Armorici, & Galli vniuerſi debeant, pro iis quibus in omnium luce verſatus es, & verſaris adhuc magna cum nominis fama oneribus & honoribus, dignum eſse, qui labem bonis multis infectam detergeas & eluas, veras demonſtrationes falſis opinionibus & σφάλμασι opponendo. Imo etiam iactatores iſtos perſtringas, & ſe ſuæ demum iactationis mole obrui prodas. Atque ex inſignibus illis tuis ingenij in Mathematices diſciplinæ abſtruſioribus & occultioribus arcanis monumentis, ad quodlibet problema ſoluendum aptis, & proinde cupitis & iam exſpectatis: quorum iam paratas typographorum diligentia demonſtrationum figuras ſcimus, vnum aut alterum è multis librum proferas, vt obuiam eatur coniectantium grandibus ſomniis, & veluti de exercitu vndique instructo alam educas, quæ vagantium & diſcurrentium reprimas in tua caſtra irruptiones & excurſiones: ſicque tibi & publicæ rei conſulturum facile omnes ſperamus: ſuggillatoréſque alienæ famæ finem tandem aliquando facturos, ſi non promiſsionum, quibus diues eſse quiſque poteſt, at certe magnæ de iis conceptæ opinionis ſpem te concuſsurum & deminuturum. Carnutibus A. D. Calend. Mai. An. CIↃ IↃ XCIII.

ELENCVS CAPITVM
LIBRI OCTAVI RESPONSORVM.

Problema de duabus mediis ἀλόγων. CAPVT I.

Hiſtoria duplicationis Cubi. CAPVT. II.

Protaſes Cyclotomicæ. CAPVT III.

Μεσογράμμων. *Radius.* μετρικὴ τεχνή. *Scalprum.* Δύναμις. *Dies Septimanæ.* CAPVT IIII..

Περὶ δύο μέσων Προβλήματος *cum extremæ ſunt in ratione dupla.* CAPVT V.

Vſus volutarum in dimenſione circuli. CAPVT VI.

Ad deſcriptionem Heptagoni propoſitam à F.F.C.Scholium. CAPVT VII.

Γραμμὴ τετραγωνίζουσα. CAPVT VIII.

Γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχουσαι. CAPVT IX.

Progreſſio linearum rectarum quæ circumferentiis circuli ſubtenduntur. CAPVT X.

Arbeli & Lunularum quadrationes aliquæ. CAPVT XI.

De Miſtilineis ſiue angulis ſiue figuris. CAPVT XII.

Angulus cornicularis. CAPVT XIII.

Æqualitas lineæ rectæ & circumferentiæ ſecundum Archimedem comprobata. CAPVT XIIII.

Geometrica κόχλου μέτρησις *bene proxima veræ.* CAPVT XV.

De alterâ methodo quadrandi circulum per angulum angulo qui fit à tangente helicem & Diametro circuli propemodum æqualem. CAPVT XVI.

Progreſſio Geometrica. CAPVT XVII.

Polygonorum circulo ordinatè inſcriptorum ad circulum ratio. CAP.XVIII.

Πρόχειρον, *ſeu ad vſum Mathematici Canonis Methodica.* CAP. XIX.

Annus Gregorianus. Decem dies exemptiles. Sodes Æquinoctij verni. Επακταὶ ἡμέραι. CAPVT XX.

ERRATA.

FOlio 1. *in ſcripo* ſcribendum *in ſcirpo.*

Eodem verſo à linea ſunt tamen ad lineam βασιλῶ radiendæ cæſuræ. Et in linea poſtrema folij 2.

Folio 2. verſo σράμμα lege γράμμα.

Folio 5. τετραγωνοῦσιν ſcribendum τετραγωνίζουσιν.

Folio eodem verſo τετραγωνοῦσαι ſcribe τετραγωνίζουσαι.

Folio 6. κυκλοῦ ſcribe κύκλου.

Folio 14. Propoſitione XIII. in gloſſario *eſt Zeteticis* ſcribendum *eſt in Zeteticis.*

Ex omnibus *ſeptupla* ſcribendum *ſextupla.*

An hanc, an illam, an neutras?] bene perſpicuis demonſtrationibus.

Quartæ.

Cui circulo ſit debita] cui circulo æquetur.
Data poteſtas] datæ lineæ rectæ quadratum.
Circuli] æquandum circulo.

Quintæ.

In dato orbe circi] in dato circulo.
Quod ſegmen requirat] cui ſegmento æquetur.
Data poteſtas] datæ lineæ rectæ quadratum.
Segminis] æquandum ſegmento.

Sextæ.

In dato orbe circi] ad datum circulum.
Quantum modulum requirat] quam analogiam habeat.
Data poteſtas] datæ lineæ rectæ quadratum.
Segminis] æquandum ſegmento.

Septimæ.

Quæ eſt poteſtas] quæ eſt linea recta, cuius quadratum eſt æquale.
Dati ſegminis] dato ſegmento circuli.

Octauæ.

Queuis ſcalpra] datum ſectorem circuli maiorem.
Secare trifariàm] ſecare in ratione imperatâ.

Nonæ.

Angulum] datum ſectorem circuli minorem.
Secare trifariàm] ſecare in ratione imperatâ.

Etſi autem inſolens fortaſſis videbitur conſtructio, tamen omninò neceſſaria eſt, vt propoſitiones ſint in tuto, quas alioquin ita conciperet Geometra.

1 Dato circulo inuenire quadratum æquale.
2 Inuenire lineam rectam circumferentiæ dati circuli æqualem.
3 Oſtendere latus quadrati circulo æqualis eſſe incommenſurabile vel commenſurabile diametro.
4 Dato quadrato inuenire circulum æqualem.
5. & 6. Datum circulum ita ſecare, vt ſegmentum æquale ſit dato quadrato.
7 Dato circuli ſegmento inuenire quadratum æquale.
8. & 9. Datam circumferentiam circuli ſecare in ratione imperatâ.

Epilogus poetica eſt.

Μεσόγραμμον. Radius. μετρικὴ τεχνή. Scalprum. Δύναμις. Dies Septimana. CAPVT. IIII.

Διατὶ λαβεῖν μεσόγραμμα non eſt δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Non magis διατὶ μεσόγραμμα ſunt duæ mediæ lineæ quam διατὶ παραλληλόγραμμα duæ lineæ parallelæ, vel διατὶ εὐθύγραμμα duæ rectæ, διατὶ μελανόγραμμα duæ nigræ, πολύγραμμα plures, πεντάγραμμα quinque, ac denique μονόγραμμον linea vna. Παραλληλόγραμμα, εὐθύγραμμα, περιφερόγραμμα, καμπυλόγραμμα, & ſimilia adiectiua à voce γραμμῆς deducta ſunt ſchemata & figuræ, quæ lineis interſtinguntur.

¶ Radius elegans eſt verbum quo dimidia dimetiens circuli ſignificetur. Cicero in Timæo.

» Et globoſus fabricatus eſt mundus, quod Græci σφαιροειδῆ vocant, cuius » omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur. Virgilius ſecundo Georgicôn.

» *Hinc* (id eſt, è Syluis) *radios triuere rotis Agricolæ.*

Ouidius ſecundo Metamorphoſeôn.

» *Aureus axis erat, temo aureus, aurea ſummæ,*

» *Curuatura rotæ, radiorum argenteus ordo.*

Plato autem in eo quem Tullius interpretatus eſt Timæi loco vocem ἀκτῖνος non vſurpauit.

¶ Non vox Metricæ pro Geometriâ, ſed Geometriæ vox pro Metricâ recepta eſt. Plato in Philebo τί δὲ λογιστικὴ καὶ μετρητικὴ κατὰ τὴν τεκτονικὴν καὶ κατ' ἐμπορικὴν τῆς κατὰ φιλοσοφίαν γεωμετρίας τε καὶ λογιστικῶν καὶ καταμελετωμένων πότερον ὡς μία ἑκατέρα, λεκτέον ἢ δύο τιθῶμεν. Idem libro VII. de Republica Geometriam ponit τὴν περὶ τὸ ἐπίπεδον πραγματείαν. At μάθημα περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξην καὶ τὸ βάθους μετέχον οὔπω δοκεῖ εὑρέσθαι, καὶ τῇ ζητήσει γελοίως ἔχει. Et dicebatur Stereometria quam vſu tamen Geometriam quoque σφόδρα γελοῖον ὄνομα, vt eſt in Epimenide, tandem vocauerunt.

¶ Σκυτοτόμος ſecat apud Platonem τομεῖ καὶ σμίλῃ. τομεὺς figura Geometrica eſt. Ergo σμίλη figura quoque erit Geometrica. Vix ſcalpra & formas ita emerim non ſutor ad locupletandum Mathemata. Artificum enim organa à figuris Geometricis deſignantur. At figuras contrà Geometricas ab artificum organis denominari non ſinet Plato. Quinimmo dixerit illud eſſe τὸ γεωμετρίας ἀγαθὸν διαφθείρειν ἀπὸ τῶν ἀσωμάτων καὶ νοητῶν ἀποδιδρασκούσης ἐπὶ τὰ αἰσθητά.

¶. Δύναμις lineæ rectæ non eſt ipſa linea recta, aliáue, longitudo, ſed planum. Δύναμις Circuli non eſt Circulus, aliáue figura plana, ſed Plano-planum. Eſt δυναμοδύναμις. Plana-planis, plana-plana plano-planis comparantur. Nemini licet à lege homogeniorum deflectere.

¶ De diebus ſeptimanæ inſignis eſt & ſingularis apud Dionem locus libro xxxvij. Sic enim ait ille.

Dion Caſſius lib. 37.

Τὸ δὲ δὴ ἐς τοὺς ἀστέρας τοὺς ἑπτὰ τοὺς πλανήτας ὠνομασμένους τὰς ἡμέρας ἀνακεῖσθαι κατέστη μὲν ὑπ' Αἰγυπτίων πάρεστι δὲ καὶ ἐπὶ πάντας ἀνθρώπους, οὐ πάλαι ποτὲ ὡς λόγῳ εἰπεῖν ἀρξάμενον οἱ γοῦν ἀρχαῖοι Ἕλληνες οὐδαμῇ αὐτὸ (ὅσα γε ἐμὲ εἰδέναι) ἠπίσταντο ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ πάνυ νῦν τοῖς τε ἄλλοις ἅπασι καὶ αὐτοῖς καὶ τοῖς Ῥωμαίοις ἐπιχωριάζει καὶ ἤδη καὶ τοῦτο σφίσι πάτριον τρόπον τινὰ ἐστὶ βραχὺ τι περὶ αὐτοῦ διαλεχθῆναι βούλομαι πῶς τε καὶ τίνα τρόπον οὕτω τέτακται ἤκουσα δὲ δύο λόγους, ἄλλως μὲν οὐ χαλεποὺς γνωσθῆναι, θεωρίας τινὰς ἐχομένους, εἰ γάρ τις τὴν ἁρμονίαν τὴν διὰ τεσσάρων καλουμένην (ἥπερ που καὶ τὸ κῦρος τῆς μουσικῆς συνέχειν πεπίστευται) καὶ ἐπὶ τοὺς ἀστέρας τούτους ὑφ' ὧν ὁ πᾶς τοῦ οὐρανοῦ κόσμος διείληπται, κατὰ τὴν τάξιν καθ' ἣν ἕκαστος αὐτῶν περιπορεύεται καὶ ἐπαγάγοι. ἀρξάμενος ἀπὸ τῆς ἔξω περιφορᾶς τῆς τῷ Κρόνῳ δεδομένης ἔπειτα διαλιπὼν δύο τὰς ἐχομένας τὸν τῆς τετάρτης δεσπότην ὀνομάσειε καὶ μετ' αὐτὸν δύο αὖ ἑτέρας ὑπερβὰς ἐπὶ τὴν ἑβδόμην ἀφίκοιτο κἀν τῷ αὐτῷ τούτῳ τρόπῳ αὐτάς τε ἐπανιὼν καὶ τοὺς ἐφόρους σφῶν θεοὺς ἀνακυκλῶν ἐπιλέγοι ταῖς ἡμέραις εὑρήσει πάσας αὐτὰς μουσικῶς πως τῇ τοῦ οὐρανοῦ διακοσμήσει προσηκούσας εἷς μὲν δὴ οὗτος λέγεται λόγος ἕτερος δὲ ὅδε τὰς ὥρας τῆς

FRANCISCI VIETÆ
VARIORVM DE REBVS MATHEMATICIS RESPONSORVM,
LIBER VIII.

Preblema de duabus mediis, ἄλογοι. CAPVT I.

DE duplicatione Cubi interrogatus, quare eam non adgnoſceret Geometra, ita reſpondi.

Lege Geometricâ quiſquis duce conſtruit, vnum
Ad duo quæ data ſunt puncta capit medium.
Sed medium duplex illum reperire neceſſe eſt,
Quem mouet augendi fabrica iuſſa Cubi.
Tu numerare potes, numeróſque reſoluere? binis
Soluere de mediis arte problema potes.
Septa Geometræ non egreſſurus, idipſum
Tentas? in vanum te, miſer, excrucias.
Quæ cauſſa? anne illa hac ars eſt præſtantior arte?
Quódque poteſt numerus, linea nónne poteſt?
Eſt data principium numeri monas, illius omnes
Ad numeros ratio eſt nota ſubinde datos.
Sed nulla eſt ex ſe data linea, quæque relata eſt,
Quòd punctum ſolâ mente ſubeſt minimum.
Sic, cum principium menſuræ circulus extet,
Ponitur ad radium quemlibet ille datum.
Qui verò exercet numeros, malè collocat horas,
Si rectum curuo conciliare ſtudet.
Nempe eſt ad minimam cycloides linea rectam,
Ad monadem ſicut maximus eſt numerus.
Infinita Dei vis non datur, vt datur vnus,
Nec punctum eſt cæli terra quod omnis habet.
Hæc ego perpendens myſteria Numinis alti,
In ſcripto nodum quærere non ſtatuo.

Sanè quot veteres conſtruxere Problema περὶ δύο μέσας, confugere εἰς ὀργανικὴν, quales duodecim ſummi illi artifices, Eudoxus, Plato, Hero, Apollonius, Diocles, Pappus, Sporus, Menechmus, Archytas, Eratoſthenes, ac denique Nicomedes. quorum omnium ſententiæ extant apud Eutocium in commentariis ad Ar-

chimedem. de Sphæra & Cylindro, vt non ſine cauſâ Plutarchus dixerit problema illud ἄλογον, non quòd numeris explicari non poſſit, vt γραμμαὶ ἄλογοι dicuntur, ſed cuius fabrica non ratione, ſed inſtrumento conſtituatur.

Locus Plutarchi eſt in Marcello inquientis

Ἀππίου μὲν τὸν πεζὸν ἐπάγοντος στρατὸν, αὐτὸς πεντήρεις ἔχων ἑξήκοντα, παντοδαπῶν ὅπλων, καὶ βελῶν πλήρεις, ὑπὲρ δὲ μεγάλου ζεύγματος νεῶν ὀκτὼ πρὸς ἀλλήλας συνδεδεμένων μηχανὴν ἄρας, ἐπέπλει πρὸς τὸ τεῖχος τῷ πλήθει καὶ τῇ λαμπρότητι τῆς παρασκευῆς καὶ τῇ δόξῃ τῇ περὶ αὐτὸν πεποιθώς. ἧς ἄρα λόγος οὐδεὶς ἦν Ἀρχιμήδει, καὶ τοῖς Ἀρχιμήδους μηχανήμασιν, ὧν ὡς μὲν ἔργου ἄξιον σπουδῆς, οὐδὲν ὁ ἀνὴρ προὔθετο. γεωμετρίας δὲ παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα πλεῖστα, πρότερον φιλοτιμηθέντος Ἱέρωνος τοῦ βασιλέως, καὶ πείσαντος Ἀρχιμήδη τρέψαι τι τῆς τέχνης ἀπὸ τῶν νοητῶν ἐπὶ τὰ σωματικὰ, καὶ τὸν λόγον ὁμῶς γέ πως δι' αἰσθήσεως μίξαντα ταῖς χρείαις, ἐμφανέστερον καταστῆσαι τοῖς πολλοῖς. τὴν γὰρ ἀγαπωμένην ταύτην καὶ περιβόητον ὀργανικὴν ἤρξαντο μὲν κινεῖν οἱ περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν, ποικίλλοντες τῷ γλαφυρῷ γεωμετρίαν, καὶ λογικῆς ἀποδείξεως οὐκ εὐποροῦντα προβλήματα, δι' αἰσθητῶν καὶ ὀργανικῶν παραδειγμάτων ὑποδιδόντες, ὡς τὸ περὶ δύο μέσας ἄλογον πρόβλημα, καὶ στοιχεῖον ἐπὶ πολλὰ τῶν γραφομένων ἀναγκαῖον, εἰς ὀργανικὰς ἐξῆγον ἀμφότεροι κατασκευὰς μεσογράφους τινὰς ἀπὸ καμπύλων γραμμάτων, καὶ τμημάτων μεθαρμόζοντες. Ἐπεὶ δὲ Πλάτων ἠγανάκτησεν, καὶ διετείνατο πρὸς αὐτοὺς, ὡς ἀπολλύντας καὶ διαφθείροντας τὸ γεωμετρίας ἀγαθὸν. ἀπὸ τῶν ἀσωμάτων, καὶ νοητῶν ἀποδιδρασκούσης ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ, καὶ προσχρωμένης αὖθις αὖ σώματι πολλῆς καὶ φορτικῆς βαναύσου ἐργασίας δεομένης, οὕτω διεκρίθη γεωμετρίας ἐκπεσοῦσα μηχανικὴ καὶ περιορωμένη πολὺν χρόνον ὑπὸ φιλοσοφίας μία τῶν στρατιωτίδων τεχνῶν ἐγεγόνει.

Sunt tamen quidam adeò felicis ingenij, vt ſalutatâ Geometriâ ſtatim ſe ἄλογα quæque & ἄρρητα adſequi poſſe contendant, & excitandi ſe cauſâ ſæpe ante triumphum canant & ludant. Publicè autem intereſt ne ſtudioſi operâ & ocio abutantur. Quamobrem in eos ita luſi.

Plura, Mathematici, ne vota vouete caduca,
Decepti niueos nec iugulate boues.
Conſecrare libet ſi veſtræ anathemata mentis,
Non ebur, at cornu, ſomnia veſtra probet.

Hiſtoria duplicationis Cubi. CAPVT II.

Hiſtoria duplicationis Cubi ex epiſtolâ Eratoſthenis ad Ptolemæum regem, quam cum Epigrammate recenſet Eutocius, & ex Vitruuio ſcitu digna, & iucunda eſt.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν.

Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασὶν εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν,

Μικρόν γ' ἔρεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου,
Διπλάσιον ἔστω.

ὁ δὲ τούτων τοῦ Κύβου ἐπισφαλεὶς, διπλασιάζων ἕκαστον κῶλον ἐν πάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός· ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι· πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτος Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν,

ἂν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ᾖ διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λάβωσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτῷ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινά φασιν Δηλίους ἐπιβαλλομένους κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν Ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ Μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα, ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μέδιμνον εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα. δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη, καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νευρὰ, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς μέσων εὑρέσεως.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὦ 'γαθὲ τεύχειν
φράζεαι, ἢ στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν
Εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα, κἂν σύγε μάνδρην
ἢ σιρὸν, ἢ κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος
Τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μὴ δὲ σύγ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
μὴ δὲ μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μὴ δ' εἴ τι θεουδέος Εὐδόξοιο,
καμπύλον ἐγγραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖς δὲ δὲ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων Πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
πάνθ' ὅσα καὶ Μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα
Αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε Ζεῦ
καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
τοῦ Κυρηναίου τοῦτ' Ἐρατοσθένεος.

Vitruuius libro IX. Capite II.

Transferatur mens ad Archytæ Tarentini, & Eratoſthenis Cyrenæi cogitata. Hi enim multa & grata à Mathematicis rebus hominibus inuenerunt. Itaque cùm in cæteris inuentionibus fuerint grati, in eius rei concertationibus maximè ſunt ſuſpecti. Alius enim alia ratione explicare curauit quod Delo imperauerat reſponſis Apollo, vti ara eius quantum haberet pedum quadratorum id duplicaretur, & ita fore vt ij qui eſſent in eâ inſulâ tunc religione liberarentur. Itaque Archytas hemicylindrorum deſcriptionibus, Eratoſthenes organicâ Meſolabi ratione idem explicauerunt.

Vt autem Eratoſthenes de ſuo inuento conſecrauit mentis anathema, ſic ante

ἡμέρας καὶ τῆς νυκτὸς ἀπὸ τῆς πρώτης ἀρξάμενος ἀριθμεῖν καὶ ἐκείνην μὲν τῷ Κρόνῳ διδοὺς τὴν δὲ ἔπειτα τῷ Διῒ καὶ τρίτην Ἄρει τετάρτην Ἡλίῳ πέμπτην Ἀφροδίτῃ ἕκτην Ἑρμῇ καὶ ἑβδόμην Σελήνῃ. κατὰ τὴν τάξιν τῶν κύκλων καθ' ἣν οἱ Αἰγύπτιοι τοιαύτην νομίζουσι καὶ τοῦτο καὶ αὖθις ποιήσας πάσας γὰρ οὕτως τὰς τέσσαρας καὶ εἴκοσιν ὥρας περιελθὼν εὑρήσεις τὴν πρώτην τῆς ἐπιούσης ἡμέρας ὥραν ἐς τὸν Ἥλιον ἀφικνουμένην καὶ τοῦτο καὶ ἐπ' ἐκείνων τῶν τεσσάρων καὶ εἴκοσιν ὡρῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τοῖς πρόσθεν λόγον πράξας τῇ Σελήνῃ τὴν πρώτην τῆς τρίτης ἡμέρας ὥραν ἀναθήσεις καὶ οὕτω καὶ διὰ τῶν λοιπῶν πορεύσῃ τὸν προσήκοντα ἑαυτῇ θεὸν ἑκάστη ἡμέρα λήψεται. ταῦτα μὲν οὕτω παραδέδοται.

Id eſt ex interpretatione Xylandri.

Quod autem dies ad ſeptem ſidera illa quos planetas appellarunt referuntut id ab Ægyptiis haud ita dudum vt paucis dicam inſtitutum ad omnes homines dimanauit. Nam priſcis Græcis quantum mihi conſtat notus hic mos non fuit & quandoquidem is nunc & apud omnes homines vbique & præſertim apud Romanos vſitatus eſt paucis qua ratione & quo pacto ita inſtitutus ſit diſſeram. De quo duos ſermones accepi haud ita difficiles cognitu contemplationi tamen cuidam innitentes. Nam ſi quis harmoniam eam quæ diateſſaron vocatur (quæ alioquin in Muſica primas obtinere creditur) etiam ad iſthæc ſidera quibus omnis cæli ornatus conſtat ita transferatur quemadmodum ordo conuerſionis vniuſcuiuſque eorum exigit factóque ab extremo ambitu quem Saturno tribuunt initio dein proximè. ſequentes duos motus præteriens quarti dominium recenſeat iterumque ab eo duobus proximè præteritis ad ſeptimam conuerſionem deueniat. Atque hoc modo diebus ſingulis eorum inſpectores gubernatoréſque deos in orbem rediens deligat aſſignétque. Is inueniet omnes dies muſica quadam ratione celeſti adminiſtrationi congruere. Atque hæc prior fertur ratio. Altera hæc eſt. Horas tam dici quam noctis numera à prima incipiens eámque Saturno tribue ſequentem Ioui, tertiam Marti, quartam Soli, quintam Veneri, Mercurio ſextam ſeptimam lunæ ſecundum ordinem orbium quem eo quo perhibui modo Ægyptij tradunt,hócque aliquoties facto vbi per viginti quatuor horas circumiueris primam ſubſequentis diei horam inuenies ſoli obtingere. Iam ſi huius quoque diei horas viginti quatuor eodem modo tractes ad Lunam referes primam tertiæ diei horam. Sique eodem modo reliquos etiam dies percurreris quæuis dies ſibi congruentem deum accipiet. Atque hæc quidem ita perhibentur.

Περὶ δύο μέσας Πρόβλημα, *cùm extremæ ſunt in ratione duplâ.* CAPVT V.

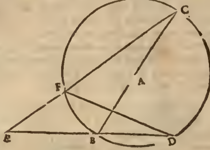
IN Supplemento Geometrico adnotata eſt ex Poriſticis methodus deſcribendi compendioſè *εἰς χύβε διπλασιασμὸν* quatuor lineas rectas *ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ* cum extremæ ſunt in ratione duplâ. Placet igitur hoc loco viâ ſyntheſeos idem opus demonſtrare.

PROPOSITIO.

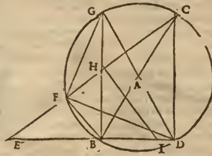
Deſcribere quatuor lineas rectas continuè proportionales, quarum extremæ ſint in ratione duplâ.

Centro A interuallo quocumque deſcribatur circulus, & actâ diametro BAC, ſumatur BD circumferentia hexagoni. Et ſubtendantur BD BC, & in DB continuatâ ponatur CE ſecans circulum in F, ita vt FE fiat æqualis ipſi BD ſeu

AD vel AC ſemidiametro circuli, & connectatur FD. Dico continuè proportionales eſſe EF EB FD BC.



Quoniam enim triangula EFD EBC angulum habent ad E communem, ipſi autem angulo ECB angulus FDE eſt æqualis, cùm vtriuſuis amplitudinem duplam definiat eadem circumferentia BF, ideò angulus EFD angulo EBC eſt æqualis, reliquus videlicet reliquo. Iraque ſimilia triangula ſunt EFD EBC, & vi ſimilitudinis eſt vt EF ad EB ita FD ad BC.



Porrò actæ CD agatur æqualis & parallela BG, ſecans EC in H, & ad H educatur HI ipſi EC perpendicularis, ſecans ED in I. & connectantur GF FB. Triangula igitur rectangula ſunt EFB DFG. Anguli enim ad F recti ſunt. Sed & anguli FBC duplam amplitudinem definit circumferentia CGF. Conſequentur anguli exterioris, videlicet FBE, amplitudinem duplam definit circumferentia FBD, angulus igitur FBE angulo FGD eſt æqualis, & reliquus reliquo. Quare triangula EFB DFC ſimilia ſunt. Ipſi autem EFB ſimile eſt triangulum EHI, quia parallelæ ſunt FB HI, vtraque ſecans EC perpendiculariter, hæc ex conſtructione, illa ex vi circuli.

Eſt igitur vt FD ad DG, ita EH ad EI, & vt EF ad EB ita EH ad EI. Eſt autem vt EF ad EB ita EB ad EH propter triangulorum quoque EFB EBH ſimilitudinem. Quare proportionales ſunt continuè, EF, EB, EH, EI. Sed ex ratione parallelarum eſt quoque vt BD, id eſt EF, ad EB, ita HC ad EH. Quare HC EB ſunt æquales. Dico EI quoque æquari BC.

In triangulo enim EBC obliquangulo, cuius altitudo CD, quadratum ex EC æquale eſt quadraris ex BC EB ſingulis, vnà cum eo quod fit ſub EB, BD bis. Ipſum verò quadratum ex EC, æquale quadraris ex EH HC ſingulis vnà cum eo quod fit ſub EH HC bis. Vtrinque auferatur quadratum ex HC ſeu EB. Quadratum igitur ex EH vnà cum eo quod fit ſub EH EB bis, æquatur quadrato ex BC vnà cum eo quod fit ſub EB BC id eſt, æquatur facto ſub BC & compoſitâ ex EB BC. Sed quadratum ex EH valet factum ſub EB EI. Facto autem ſub EH EB bis æquatur factum ſub EF EI bis, factúmue ſub BC EI. Quare factum ſub EI, & compoſitâ ex EB EF æquatur facto ſub BC & compoſita ex EB EF. Eſt igitur BG æqualis EI, & ſunt continuè proportionales EF, EB, EH, BC. Sed erat vt EF ad EB ita FD ad BC. Quare FD quoque eſt æqualis ipſi EH, & fiunt continuè proportionales EF, EB, ED, BC. Primæ autem EF, extrema BC eſt dupla. Eſt enim BC diameter, & ipſa EF conſtructa eſt ſemidiametro æqualis. Conſtructæ ſunt igitur quatuor lineæ rectæ continuè proportionales EF, EB, EP, BC, quarum extremæ ſunt in ratione duplâ. Quod erat faciendum.

Eſt autem Mechanice bene obuia & abſoluitur vnâ, quod aiunt, circini adaperturâ.

Sit	EF	100,	000,	000.	I.	
Fit	EB	125,	992,	105.	II.	ἔγγιστα.
	EG	158,	740,	105.	III.	ἔγγιστα.
	CB	200,	000,	000.	IIII.	ἀκριβῶς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Cùm iubetur Arithmeticus inter 1 & 2 exhibere numerum medium proportionalem, ille verò reſponderit non exhiberi, quoniam numeri extremi 1 & 2 non ſunt ſimiles plani, tam aptè in eâ hypotheſi ſoluit problema de vno medio, quàm ſi iuberetur inter 1 & 4 exhibere medium proportionalem, & exhibuerit 2. Problema enim Arithmeticum, Inter duos numeros datos inuenire numerum medium proportionalem, *intelligitur, ſi modò dati extremi ſint ſimiles plani, id eſt, inuenire medium, ſiquidem ſit aliquis medius. Sic cùm iubetur inter 1 & 2 exhibere duos medios continuè proportionales, ille verò reſponderit non exhiberi, quoniam extremi 1 & 2 non ſunt ſimiles ſolidi, tam aptè in eâ hypotheſi ſoluit problema de duabus mediis, quàm ſi iuberetur inter 1 & 8 exhiberi duos medios numeros continuè proportionales, & exhibeat 2 & 4. Problema enim Arithmeticum* Inter duos numeros datos inuenire duos medios numeros continuè proportionales, *intelligitur, ſi modo dati numeri ſint ſimiles ſolidi. Similitudinem autem numerorum arguit Arithmeticus ſtatim ac in ſpecie dati ſunt numeri. Cùm autem Geometra profitetur inter datas duas lineas rectas inuenire ſe mediam proportionalem, non ſatisfacit problemati, niſi eam exhibeat, ſiue data extrema ſe habeant in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum, ſiue in aliâ quacumque, quoniam media illa de quâ quæritur eſt re ipſâ. Neque enim vt in numeris, ſic in lineis perpetua eſt ſymmetria. Aequè ſi quis profiteatur inter datas duas lineas rectas inuenire ſe duas medias continuè proportionales, non ſatisfaciet problemati, niſi eas exhibeat, ſiue data extrema ſe habeant in ratione cubi numeri ad cubum numerum, ſiue aliâ quacumque. cùm dua illa media quæſita ſint re ipſâ. Planè, datis duabus lineis rectis habentibus inter ſe proportionem numeri cubi ad numerum cubum, licebit inuenire Geometricè duas medias continuè proportionales. inuenietur enim maxima datarum communis menſura, quæ metietur datas per numerum cubum. Metiatur ſanè primam octies, quartam vicies ſepties. Prima igitur ad ſecundam per reſolutionem Arithmeticam erit vt duo ad tria. Itaque qualium partium prima erit octo, talium ſecunda erit duodecim. Fit autem Geometricè vt numerus ad numerum, ita linea recta ad lineam rectam. Sed eam habitudinem numeri cubi ad numerum cubum oportebit ex lege quæſtionis proponi, quoniam vt eam arguit Arithmeticus numerorum qui proponuntur, artificiosâ, vnitatis vt, reſolutione, non ita Geometra ſuarum linearum, quarum nulla datur ex ſe, conſtructione.*

Vſus volutarum in dimenſione circuli.
CAPVT VI.

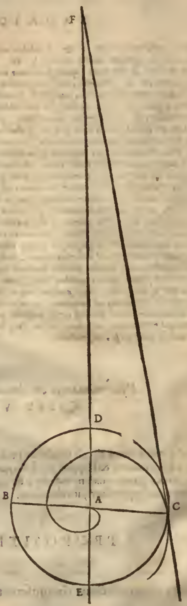
QVæ ad dimenſionem circuli pertinent problemata, ſoleo, miſsâ factâ Dinoſtrati, Nicomedis, & Hippiæ lineâ τετραγωνίζουσαν, ea per Helicas Archimedæas, feliciores, meo quidem iudicio, & elegantiores, quando earum vis digniùs quàm ſolet expenditur, ita abſoluere.

PROPOSITIO I.

Inuenire lineam rectam circumferentiæ dati circuli æqualem.

Sit datus circulus cuius A centrum, diameter B A C. Oportet inuenire lineam rectam circumferentiæ dati circuli æqualem.

Diametrum B C ſecet perpendiculariter diameter D E, & deſcribatur helix, cuius



principium A, principium verò conuerſionis recta A C. Tangat autem helicem in C puncto recta C B, abſcindens A D continuatam in F. Dico rectam A F toti circumferentiæ dati circuli ſub A centro deſcripti eſſe æqualem. Ex demonſtratis ab Archimede propoſitione xxviij. περὶ ἑλικῶν.

PROPOSITIO II.

Inuenire quadratum dato circulo æquale.

At per primam Archimedis ἐν κύκλου μετρήσει triangulum rectangulum cuius altitudo æqualis eſt perimetro circuli, baſis ſemi-diametro, circulo eſt æquale. Area autem cuiuſuis trianguli eſt æqualis ei quod fit plano à baſe in dimidium altitudinis. Quod igitur fiet ex ſemiperimetro, & ſemidiametro circuli erit æquale circulo. Quare inter ſemidiametrum circuli, & lineam rectam æqualem ſemi-circumferentiæ ſumatur media proportionalis, à qua efformetur quadratum. Erit igitur illud circulo æquale.

PROPOSITIO III.

Inuenire circulum dato quadrato æqualem.

Exponatur circulus quilibet, & is quadretur. Et fiat vt latus quadrati circulo expoſito æqualis, ad latus dati quadrati, ita ſemidiameter expoſiti ad aliam rectam. Erit igitur alia illa recta ſemidiameter inueniendi circuli. Deſcribatur iraque ex poſtulato circulus. Ergo deſcriptus dato quadrato erit æqualis.

PROPOSITIO IIII.

Inſcriptas circulo lineas rectas ita producere, vt productæ ſint æquales circumferentiis, quibus inſcriptæ ſubtenduntur.

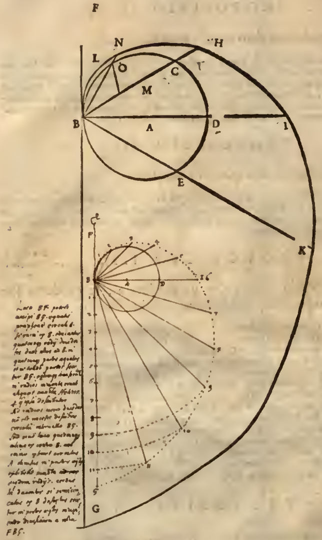
Circulo ſub A centro deſcripto: inſcribantur primum Diameter BD, & præterea quælibet rectæ BC BE. Oportet rectas BC BD BE ita producere vt productæ ſint æquales ipſis circumferentiis BC, BD, BE. Tangat circulum recta FBG poſita FB æquali duplo totius circumferentiæ circuli, & deſcribatur helix cuius principium ſit B, principium verò conuerſionis recta BF. Et in Helicem incidant continuatæ FB quidem in G inſcriptæ verò BC BD BE in H, I, K. Vnde fiat BI æqualis ſemi-circumferentiæ & BG æqualis toti circumferentiæ circuli. Et ſit L inter B & C verſus punctum F. Dico ſimiliter BCH BEK eſſe æquales circumferentiis BLC BLE. Et quotquot lineæ inſcribentur eidem circulo & porrigentur ad helicem, Dico porrectas & in helicem incidentes fore æquales ipſis circumferentiis intra quas deſcribuntur. Etenim ex naturâ & definitione Helicôn Archimedearum, eſt vt circumferentia BLD ad circumferentiam BLC, ita recta BI ad rectam BH. Sed recta BI eſt æqualis circumferentiæ BD. Ergo recta BH eſt æqualis circumferentiæ BLC. Viget autem in reliquis ea ipſa demonſtratio.

PROPOSITIO V.

Datam circumferentiam ſecare in Imperata ratione.

Sit circulus ſub A centro deſcriptus, in quo detur quælibet circumferentia BC quam oporteat ita ſecare, vt tota BC ad partem eiuſdem ſe habeat in ratione imperata X ad Z. Sumatur ipſi circumferentiæ BC recta BH æqualis, deſcribendo helicem BHIG, vt in antecedente conſtructione, & fiat BH ad BM, ſicut X ad Z. Et à puncto B incidat in helicem BIG recta BN, abſcindens circumferentiam circuli in O. Eſt igitur circumferentia BC ad circumferentiam BO, ſicut recta BH ad rectam BN ſeu BM, id eſt ſicut X ad Z.

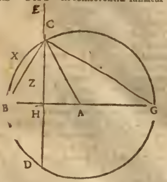
Quare factum eſt quod oportuit.



PROPOSITIO VI.

Si ſegmentum circuli ſit minus ſemi-circulo , id quod fit planum ſub ſemi-diametro & differentiâ inter duplum circumferentiæ quâ ſegmentum comprehenditur , & inſcriptam eiuſdem duplo , æquale eſt quadruplo ipſius ſegmenti.

Sub A centro deſcribatur circulus BXCD ſectus à quacumque BZC. Et ſit ſegmentum BXCZ minus ſemicirculo. Ipſi autem CXB circumferentiæ ſumatur circumferentia BD æqualis, & iungatur DC, & producatur in E ita vt DE ſit æqualis circumferentiæ DBXC. Dico id quod fit planum ſub AB CE æquari quadruplo ſectionis BXCZ.

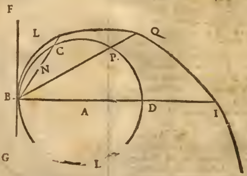


Agatur enim Diameter BAG ſecans CD in H & iungantur CA CG. Secatur igitur CD bifariam & perpendiculariter in H. Et triangulum BCG æquale eſt ei quod fit ſub altitudine CH & AB quæ dimidia eſt baſis BG. Eiuſdem vero trianguli BEG dimidium eſt triangulum CEA. Conſtat autem ſector CAB tum ſegmento BXZ tum triangulo CAB. Idem ſector eſt æqualis dimidio eius quod fit ſub AB & circumferentiâ BC. Quare ſegmentum XZ vnà cum triangulo CAB, id eſt dimidio eius quod fit ſub CH AB, æquatur dimidio eius quod fit ſub AB & circumferentiâ BC. Omnia quadruplicentur. Segmentum igitur XZ vnà cum eo quod fit ſub CD AB æquatur ei quod fit ſub AB & circumferentia DBXC hoc eſt ſub AB & rectâ DE. Vtrinque auferatur id quod fit ſub CD AB. Quadruplo igitur ſegmenti BXCZ æquatur id quod fit planum ſub AB CE. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO VII.

Dato circuli ſegmento inuenire quadratum æquale.

Sit datum circuli ſegmentum BLCN. Oportet ſegmento BLCN. inuenire quadratum æquale. Deſcribatur circulus, cuius ſpacium BLCN portio eſt. Aut igitur ſegmentum BLCN minus eſt ſemicirculo, aut maius. Sit primum minus. In deſcripto igitur circulo ſumatur circumferētia BP dupla ipſius BC & ſubtendatur BP & producatur in Q, ita vt recta BP ſit ipſi circumferentiæ BQ æqualis, ſecundum iam tradita helicis idcirco deſcribendæ præcepta. Agatur etiam ſemidiameter BD. Quod igitur fiet ſub BD PQ erit quadruplo ſegmenti BLCN æquale. Quare inter CE & AB quæretur media proportionalis, à cuius mediæ ſemiſſe quadratum erit æquale ſegmento BXCN.

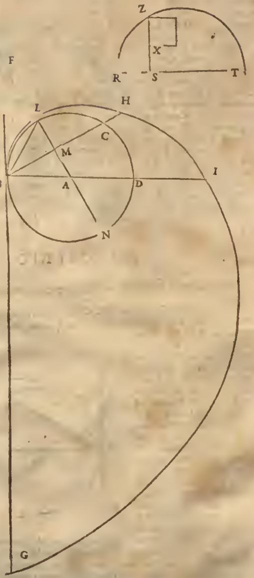


Quod ſi datum ſegmentum ſit maius ſemicirculo, nihilominus quadrabitur minus, reliquum videlicet è circulo, quod cum auferetur è quadrato circulum æquante, dabitur quadratum æquale ſegmento maiori quæſito. Itaque vtrouis caſu imperato ſatisfit.

PROPOSITIO VIII.

Datum circulum ita ſecare, vt ſegmentum ſit æquale dato quadrato.

Sit datus circulus BCDE, datum quoque quadratum cuius latus ZX. Oportet circulum BCDE ita ſecare, vt ſegmentum ſit æquale quadrato ex ZX. Aut igitur quadratum ex ZX minus eſt ſemicirculo vel maius. Sit primum minus ſemicirculo. Duplato igitur latere ZX in S, quadratum quod fit ex ZS erit quadruplum quadrati ex ZX, & ipſum quadratum ex ZS erit minus duplo circuli. Sit autem circuli diameter BAD, & cum quadratum ex ZS adplicabitur ad AB ſeu TS faciat latitudinem SR. Porro tangat circulum recta BF, poſitâ BF æquali quadruplo totius circumferentiæ circuli, & deſcribatur helix, cuius principium in B, principium vero conuerſionis in F, eaque diametrum BAD continuatam abſcindat primùm in I, contingentem vero abſcindat primum in G. Ergo BI eſt ſemi-circumferentiæ æqualis & BG toti. Itaque quod fiet ſub BA BI erit æquale circulo. Quod vero ſub BA BG æquale eiuſdem circuli duplo. Quadratum autem ex ZS minus eſt circuli duplo. Quare SR minor erit ipſâ BG. Quæ quidem BG tangit circulum. Abs B igitur poterit educi recta incidens in helicem in puncto C, circulum vero ſecans in puncto H, vt ſit CH æqualis ipſi SR per viij. Archimedis περὶ ἑλικῶν.



Educatur igitur, & ſecetur EC bifariam in M à diametro LAN, & iungatur BL. Dico ſegmentũ comprehenſum à circumferentiâ BL & rectâ quæ ei ſubtenditur eſſe æquale quadrato ex ZX ſecundum ea quæ in antecedentibus expoſita ſunt. Dato igitur circulo BCDE & quadrato à latere ZX ſectus eſt circulus à recta BM vt ſegmentum minus æquale ſit quadrato ex ZX. Quod erat faciendum.

Quod ſi datum quadratum ſit maius ſemi-circulo, auferendum erit illud à quadrato datum circulum æquante, & ita ſecabitur circulus vt ſegmentum ſit æquale illi reſiduo. Quo

ſegmento dato, reliquum circuli erit ſegmentum maius quæſitum.

Quemadmodum autem ea quæ de quadratis dicuntur ad alias rectilineorum ſpecies poſſint trahi, euidens fit ex elementis.

Ad deſcriptionem Heptagoni propoſitam à F.F.C. Scholium. CAPVT. VII.

DEſcripturus Euclides in dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum exquiſiuit triangulum Iſoſceles, in quo vnuſquiſque angulorum qui ſunt ad baſim duplus eſſet reliqui. Sic ad inſcriptionem Heptagoni ſolet inquiri triangulum Iſoſceles in quo vnuſquiſque angulorum qui ſunt ad baſim ſit triplus reliqui. Quam methodum etiam ſequutus ſum in Geometrico, quod anno ſuperiore editum eſt, Supplemento.

Triplicem autem huiuſmodi conſtructionem exhibet vno contextu F. F. C.

Primam Geometricam, ſed veræ tantum proximam, non etiam accuratam.

Alteram veram & accuratam, ſed non Geometricam.

Tertiam Geometricam ſed ἀσυλλόγιστον.

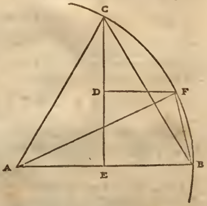
Quas ſingulas ſingulis Problematis ſuo ordine ita expono.

PROBLEMA I.

Triangulum Iſoſceles conſtituere, habens proxime vnumquemque angulorum qui ſunt ad baſim triplum reliqui.

Sub A centro interuallo quocumque AB deſcribatur circulus, in cuius circumferentia ſumatur BC arcus hexagoni, & cadat in AB ſemidiametrum perpendicularis CE, quæ ſecetur bifariam in D puncto, per quod agatur parallela ipſi AB, ſecans arcum CB in F, & iungatur FB.

Dico triangulum AFB eſſe triangulum Iſoſceles habens proximè vnumquemque angulorum qui ſunt ad baſim triplum reliqui qui ad A verticem conſtituitur.



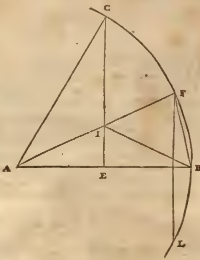
Æqualia enim ſunt crura A , AB, vt pote ſemidiametri eiuſdem circuli, arcui autem FB congruus ſinus eſt DE, dimidia totius CE. Sit igitur AC particularum 100 000. talium fit AE 50, 000 & CE 86, 602. Itaque DE eſt 43, 301, cui ſinui congruit ex Canone circumferentia xxv. partium cum beſſe partis vnius proximè, conſtituto angulo recto earumdem xc, ſeu tota circumferentia ccclx. Septima autem pars duorum rectorum continet partes xxv. cum quinque ſeptimis partis vnius. Quinque vero ſeptimæ non multò maiores ſunt beſſe. Eſt igitur circumferentia FB amplitudo anguli bene proximi ſeptimæ parti duorum rectorum. Tanta autem eſt amplitudo anguli FAB. Quare anguli AFB ABF continent ſinguli prope tres ſeptimas. Itaque vnuſquiſque eorum eſt prope triplus reliqui. Quod erat oſtendendum.

PROBLEMA II.

Iſoſceles triangulum conſtituere Mechanicâ ratione habens vnum-

quemque angulorum qui ſunt ad baſim triplum reliqui.

Sub A centro interuallo quocumque deſcribatur circulus, in quo ſumatur circumferentiâ hexagoni C B. Cadat autem in actam ſemidiametrum A B perpendicularis C E, & aliquâ Mechanicâ ratione (id enim non poſtulat Geometria) agatur altera ſemidiameter A F, quæ ita ſecet arcum C B in F perpendicularem vero C E in I, vt cum ſubtendetur arcus F B, rectæ I B F B ſint æquales.



Dico triangulum A F B eſſe Iſoſceles, & habere vnumquemque angulorum qui ſunt ad baſim triplum reliqui.

Crura enim A B, A F ſunt æqualia, ſint cum ſemidiametri eiuſdem circuli. Itaque anguli quoque A F B A B F erunt æquales. Iungatur autem B I. Fiunt igitur duo triangula rectangula A I E B I E baſes habentia æquales A E E B, altitudinem vero I E communem. Quare hypotenuſæ quoque A I I B ſunt æquales. Sunt igitur vt lateribus ſic & angulis æqualia triangula A I E B I E. Et eſt angulus I A E æqualis angulo I B E. Quoniam verò conſtructæ ſunt æquales I F F B. Ideo anguli F I B F B I ſunt æquales. Trianguli autem A I B exterior angulus F I B, cui æquatur F B I, binis I A B I B A interioribus eſt æqualis. Angulo F B I addatur angulus I B A, id eſt F A B. Angulus itaque A B F, ſeu ei æqualis A F B, fit triplus anguli F A B reliqui. Atque adeo conſtitutum eſt A B F triangulum Iſoſceles habens vnumquemque angulorum ad baſim triplum reliqui.

COROLLARIVM.

Itaque ſi dupletur circumferentia F B in L erit F B L circumferentia Heptagoni.

Ἀσυλλόγιστον.

Placeat autem παραλογίζειν. Et idcirco proponatur tanquam Geometricum, Sed re vera ἀσυλλόγιστον

PROBLEMA III.

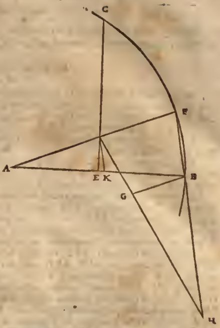
Iſoſceles triangulum conſtituere habens vnumquemque eorum qui ad baſim ſunt angulorum triplum reliqui.

Ἔκθεσις.

Sub A centro, interuallo quocumque A B, deſcribatur circulus, in quo ſumatur circumferentiâ hexagoni B C, & cadat in ſemidiametrum A B perpendicularis C E, agatur autem altera ſemidiameter A F, ſecans C B in quocumque F puncto, perpendicularem vero C E in I. (Ecquid enim attinet ad conſtructionem ſecare C E bifariam in D, & per D agere parallelam ipſi A D, ad indicandum F punctum cum in quibuſcumque ſectionibus eadem omnino vigeat argumentatio?) Denique iungatur F B.

Διορισμὸς πρῶτος.

Dico rectas I E E B æquales.



Κατασκευή.

» Producatur enim recta FB quan-
» tumuis in H, ad rectam FI & ad
» ſignum eius I angulus conſtituatur
» FIH angulo FBA æqualis (per
» 23 primi,) per ſignum I recta
» IK parallela fiat rectæ FB, per
» ſignum vero B parallela fiat rectæ
» FI recta BG, iuncta BI, & de-
» miſſa in IH perpendiculari BN.

Ἀπόδειξις I.

» Quoniam igitur Iſoſcelium ABF
» HIF anguli ſunt æquales & AFH
» vtrique communis, æquiangula & ſi-
» milia erunt ABF & HIF Iſoſce-
» lia. Quia vero trianguli ABC per-
» pendicularis CE ſecat baſim AB
» bifariam in E & ad rectos AEI
» BEI angulos ea latera AI IB &
» angulos FAI EBI facit adinui-
» cem æquales (per 4 ſexti) cum pro-
» portionalia ſint ſingula ſingulis latera.
» Cæterum cum triangulorum ABF
» & HIF trapezia BFIK & IFBG
» ſint æquiangula. (Atque hæc apodicti-
» ca hactenus vera ſunt ſed iam ſequi-
» tur paralogiſmus) & in ſimilia triangula diuidantur ſcilicet BIG & IFB, Aliud in
» IBK & IFB ſectis angulis oppoſitis ex 20 ſexti. Et triangulum IBF ſit commu-
» ne ſequetur (ex eiuſdem Monito) baſim BF vnius eſſe ad dimetientem BI vt alia
» baſis FI ad eandem dimetientem BI & idcirco æquales BF & FI (per nonam
» quinti.)

Ἀπόδειξις II.

» Rurſus & ſecundo cum Iſoſcelium ABF & HFI baſes ac reliqua latera ſint pro-
» portionalia ſi aliqua baſis BF ſit maior FI baſi reliqua latus FI maius erit latere
» BF (cum ſint ſimilia triangula BFI & IBF) ſed & minus nempe æquale baſi IF
» minore ſuppoſita quod fieri non poteſt. Itaque erunt BF & IF rectæ æquales.

Ἀπόδειξις III.

» Rurſus & tertio in triangulis BFI IFB æqualibus & habentibus vnum angulum
» BFI vni IFB æqualem vtraque rectarum FI FB eſt communis baſi vnius ac lateri
» alterius reciprocè (per 15 ſexti) & proinde æqualia erunt Iſoſcelis IFB latera IF
» ipſi FB & anguli qui ad baſim IB æquales.

Διορισμὸς δεύτερος.

» Secundo dico angulorum ABF AFB vnumquemque eſſe triplum reliqui.

Ἀπόδειξις.

» Trianguli enim AIB exterior angulus FIB vel FBI illi æqualis binis IAB
» IBA interioribus eſt æqualis cui addatur IBA æqualis ei qui ad A. Totus AFB &
» proinde reliquus ABF triplus erit anguli BAF reliqui.

Συμπέρασμα.

» Iſoſceles itaque triangulum ABF habens vnumquemque eorum ABF AFB qui
» ad baſim ſunt angulorum triplum reliqui qui ad A conſtituimus.

Elenchus Syllogiſmi.

At verò liberè acta fuit AE per quodcumque ſegmentum circumferentiæ CB. Itaque ſequeretur quamcumque circumferentiam EB, modo faciat partem ipſius hexagoni CB, eſſe amplitudinem ſeptimæ partis duorum rectorum. Hoc autem omnino eſt abſurdum.

Eſt igitur in expoſita demonſtratione ἀσυλλογισία.

Concluſio ſecunda prorſus vera eſt, & ſyllogiſtica.

At in primâ fallacia eſt.

Etſi enim quæ conſtructa ſunt trapezia IFBG BFIK ſint & bene demonſtrentur æquiangula, non ideo lateribus cenſenda ſunt homologa. Itaque triangulum IBG triangulo IBK malè concluditur ſimile.

Latus quidem IB vtrique triangulo commune eſt & angulos IGB IKB ſubtendit æquales, verum angulus FIB angulo BKI nullo caſu poteſt eſſe æqualis. Idem angulus FIB angulo BIK vno ſolo caſu poteſt accidere æqualis, videlicet, cum angulus FAB duarum eſt ſeptimarum recti. In aliis caſibus quibuſcumque inæqualitas eſt, & laterum conſequenter diſſimilitudo, eaque poteſt ita demonſtrari.

Cum ſint in triangulo AFB crura AF AB æqualia, vterque angulorum AFB BFA, ſeu iis æqualium AIK AKI, deficit à recto per ſemiſſem anguli FAB. ſeu ei æqualis IBA. Æquè in triangulo IHF, quod ſimile conſtructum eſt ipſi, ABF cum ſint crura HI HF æqualia vterque angulorum HFI HIF, ſeu iis æqualium HBG HGB, deficit à recto per ſemiſſem anguli IHF, id eſt anguli FAB. Quare angulus FBI, cui ex ratione parallelarũ æqualis eſt BIK, deficit à recto per ſeſquialterum anguli FAB. Angulus autem FIB duplus fit anguli FAB. Ac denique angulus FKB ſeu BGI, quem angulus IKA vel BGH relinquit è duobus rectis, excedit rectum per ſemiſſem anguli FAB.

Atque adeo triangulorum BIG, IBK anguli ita ſe habebunt.

Anguli trianguli BIG.

Angulus	BGI	æqualis fit	Recto plus ſemiſſe anguli FAB
Angulus	IBG	æqualis fit	Recto minus $\frac{5}{2}$ anguli FAB
Angulus	FIB	æqualis fit	Duplo anguli FAB.

Anguli trianguli IBK.

Angulus	IKB	æqualis fit	Recto plus ſemiſſe anguli FAB
Angulus	BIK	æqualis fit	Recto minus ſeſquialtero anguli FAB
Angulus	BKI	æqualis fit	Ipſi angulo FAB.

Non erit igitur angulus FIB æqualis angulo BKI, neque enim duplum eſt æquale ſimplo. Vtrique vero, ſiue angulo FIB ſiue angulo BIK, addatur ſeſquialter anguli FAB. Triplus igitur angulus FAB cum ſemiſſe eiuſdem æquabitur recto. Itaque in alia proportione quâcumque anguli FIB IBK erunt inæquales.

Omnino æqualitates cubicas non adgnoſcit Geometria ſuis contenta ſolitis poſtulatis. Qui autem Teſſeredecagonum deſcribit vel Heptagonum in æquationem incidit cubicam, vt eſt in Analyticis expoſitum. Atque ex iam conſtructo Mechanicâ ratione ſchemate ſic poteſt demonſtrari. Hic igitur eſto

PROTASIS IIII. THEOREMA.

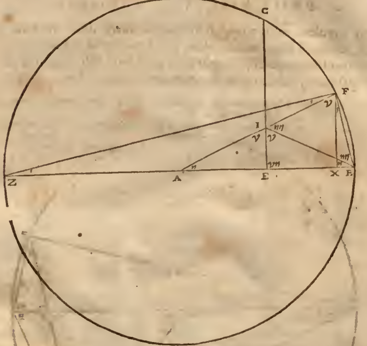
Si angulus acutus trianguli rectanguli fuerit ſeptima pars recti, So-

lidum ſub hypotenuſâ dimidiâ & quadrato perpendiculi, minus ipſius perpendiculi cubo, æquabitur cubo hypotenuſæ dimidiæ, minùs ſolido duplo ſub perpendiculo & hypotenuſæ dimidiæ quadrato.

Sit triangulum ZFB habens angulum ad F rectum ad Z vero æqualem ſeptimæ parti recti & ſecetur ZB bifariam in A.

Dico Solidum ſub AB & quadrato ex FB minus cubo ex FB æquare cubum ex AB minus ſolido duplo ſub FB & quadrato ex AB.

Centro enim A interuallo AB ſeu AZ deſcribatur circulus. Circumferentia igitur illius tranſibit per F cum ſit angulus ZFB rectus & actâ ſemidiametro AF fiet triangulum AFB crurum æqualium AF AB. Quoniam autem angulus FZB eſt ſeptima pars recti, Ideo conſtituto angulo recto ZEB partium ſeptem, earumdem an-



gulus FZB erit pars vna, & angulus FBA ſeu AFB partium earumdem ſex. angulus verò FAB duarum. Secetur autem AB bifariam in E. Itaque in AB cadat è circumferentiâ perpendicularis CE abſcindens AF in I. & connectatur BI. Triangula igitur AEI BEI æqualium ſunt laterum & angulorum, habentia angulum ad E rectum, & angulum IAE angulo IBE æqualem. Definitus eſt autem angulus totus FBZ partium ſex, qualium rectus eſt ſeptem. Angulus vero IAE ſeu IBE earumdem duarum. Cum itaque ab angulo FBZ auferentur partes duæ ad angulum IBE. Erit angulus FBI quatuor earumdem partium qualium etiam ſex conſtitutus eſt angulus IFB. Quare angulus FIB erit earumdem quoque quatuor partium vt compleantur duo recti, quos tres anguli trianguli IFB adæquent. Eſt igitur triangulum IFB æqualium quoque crurum IF FB, cum ſint anguli FBI FIB æquales.

Cadat porro in AB perpendicularis FX. Eſt igitur FB media proportionalis inter ZB, id eſt AB duplam, & XB differentiam inter AB & AX. Quare

quadratum ex FB æquale eſt duplo quadrato ex AB, minus eo quod fit bis ſub AB AX. Et conſequenter ſolidum quod fit ſub AI & quadrato ex FB æquabitur ſolido duplo ſub AI & quadrato ex AB, minus eo quod fit bis ſub AI, AB, AX. At vero eſt vt AI ad AE ita AF ſeu AB, ad AX. Duplum igitur planum ſub AI AX æquale eſt quadrato ex AB. Itaque ſolidum quod fit ſub AI & quadrato ex FB æquabitur ſolido duplo ſub AI & quadrato ex AB, minus cubo ex AB. Eſt autem AI differentia inter AB & IF ſeu FB. Quare ſolidum quod fit ſub AB & quadrato ex FB minus cubo ex FB æquale eſt cubo ex AB minus ſolido duplo ſub FB & quadrato ex AB. Quod erat oſtendendum.

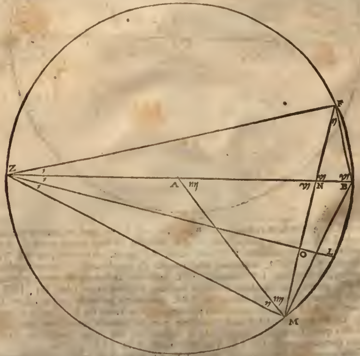
Sit AB 1. FB 1N 1Q — 1C æquatur 1 — 2N.
Sit ZB 200,000,000 fit FB latus Teſſeredecagoni circulo, cuius ZB eſt diameter, inſcripti 44, 504, 187.

PROTASIS V. THEOREMA.

Si angulus acutus trianguli rectanguli fuerit dupla ſeptima pars recti, Cubus è baſe, minus ſolido ſub hypotenuſâ dimidiâ & ipſius baſis quadrato æquabitur duplo ſolido ſub baſe & hypotenuſæ dimidiæ quadrato, minus ipſius hypotenuſæ dimidiæ cubo.

Sit triangulum ZMB habens ad M rectum, ad Z vero æqualem duabus ſeptimis recti. Et ſecetur ZB bifariam in A.

Dico cubum ex ZM minus ſolido ſub AB & quadrato ex ZM, æquari ſoli-



do duplo ſub ZM & quadrato ex AB, minus cubo ex AB.

Cen-

Centro enim A interuallo AB ſeu AZ deſcribatur circulus. Circumferentia igitur illius tranſibit per M, cum ſit angulus ZMB rectus. Secetur autem bifariam circumferentia BM in L & ipſi circumferentiæ BL ſumatur æqualis circumferentia BF, & iungantur rectæ FB FM ZL. Ipſaque FM abſcindat diametrum ZB in N, ZL vero in O.

Quoniam igitur ſiue anguli BZM ſiue anguli MFB definit duplam amplitudinem circumferentia BLM erunt æquales anguli MZB MFB, ac ſinguli duarũ ſeptimarum recti. Ipſius autem circumferentiæ BLM dimidia eſt circumferētia FB definiens amplitudinem anguli FZB. Et eſt triangulum ZFB rectangulum. Quare angulus FZB erit ſeptima pars recti, angulus vero FBZ reliquus è recto continebit ſex ſeptimas. Cum itaque in triangulo FBN angulus ad F ſit duarum ſeptimarum recti, angulus vero ad B ſex ſeptimarum, reliquus FNB erit quoque ſex ſeptimarum, vt compleantur duo recti. Quare crura FN FB erunt æqualia. Triangulo autem FNB ſit ſimile triangulum ZNM. Itaque in eo crus ZN cruri quoque ZM erit æquale, atque adeo ZL ſecabit MN in O ad angulos rectos, cum ſecet & baſim & angulum verticis bifariam. Et ideo erunt ſimilia triangula ZON ſeu ZOM & ZBF.

Et quoniam angulus BZM duplus eſt anguli BAM & conſequenter quatuor ſeptimarum cum hic è centro ille ſit è circumferentia, angulus vero FNB conſtitutus eſt ſex ſeptimarum, ideo in triangulo ANM reliquus angulus AMN erit quoque quatuor ſeptimarum ad complendum duos angulos rectos & fient rectæ AN MN æquales.

Et verò ob ſimilitudinem triangulorum ZON ZBM, erit vt ZB ad FN ita ZN ad ON. Itaque quod fiet ſub ZN. FH id eſt BF æquale erit ei quod fit ſub ON ZB, id eſt ſub MN AB.

Et quoniam ſubtenſæ ZB FM ſeſe interſecant in N eſt vt ZN ad MN ita FN id eſt FB, ad NB. Et per conſequens vt ZN ad MN ita quod fit ſub FB, ZN, id eſt ſub MN AB, ad id quod fit ſub NB ZN. Sed MN ſeu AM differentia eſt inter ZN ſeu ZM, & ZA ſeu AB. Et NB differentia eſt inter ZB ſeu AB bis & ZM. Quare per interpretationem erit vt ZM ad ZM minus AB, ita quod fit ſub ZM AB minus quadrato ex AB ad id quod fit ſub ZM AB bis, minus quadrato ex ZM. Et ſubducendo erit vt ZM ad AB, ita quod fit ſub ZM AB, minùs quadrato ex AB ad quadratum ex ZM minus quadrato ex AB & inſuper eo quod fit ſub ZM AB. Et cum quæ fiunt ſolida ſub extremis Analogiæ illius terminis comparabuntur ijs quæ fiunt ſub extremis, & vtrobique addatur ſolidum ſub AB & quadrato ex ZM. Cubus ex ZM minus ſolido ſub AB & quadrato ex ZM æquabitur ſolido duplo ſub ZM & quadrato ex AB, minùs cubo ex AB. Quod erat oſtendendum.

Sit ZB 1. ZM 1N. 1C — 1Q *æquabitur* 2N — 1.

Sit ZB 200, 000, 000, *fit* ZM 180, 193, 774. *Itaque recta* BM *ſeu* FL *fit* 86, 677, 748 *latus Heptagoni circulo cuius* ZM *eſt diameter inſcripti.*

Γραμμὴ τετραγωνίζουσα. CAPVT VIII.

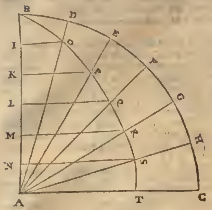
QVid ſit γραμμὴ τετραγωνίζουσα, & quis eius effectus, quæue miracula ἐν τῷ κύκλου μετρήσει καὶ τομῇ, ita expendo.

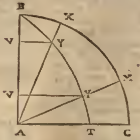
PROPOSITIO I.

Quadratariæ Hypotypoſim exhibere.

Sit A centrum circuli. BC quadrans totius circumferentiæ, AB AC ſemidiametri orthogoniæ. Secetur autem BC in partes quotcumque æquales, vt pote ſex, BD DE EF FG GH HC, & agantur ſemidiametri AD AE AF AG AH. Secetur quoque BA in partes totidem, nempe ſex, & ſint illæ, BI IK KL LM MN NA, & ipſi AC agantur parallelæ IO KP LQ MR NS ſecantes ſemidiametros AD AE AP AG AH in punctis O P Q R S. Porro intelligatur duci linea per puncta B O P Q R S, & cadere ad AC in puncto T vniformi progreſſu, nempe vt cum ſemidiameter BA & circumferentia BC ſecabuntur ſimiliter, illa in

V, hæc in X &per V acta ipſi AC parallela ſecabit baſim in Y, tranſeat BT



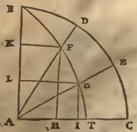


per Y, atque adeò cum ad punctum B deſcribetur ipſi AC parallela BZ, & mouebitur illa per ſingula ipſius BA puncta eo ipſo tempore, & vniformi motu, quo ſemidiameter AB circum agit BC, linea BT tranſeat per puncta ſectionum ipſarum BZ BA, talis BT eſt γραμμὴ τετραγωνίζουσα ſeu (quandoquidē quadratarij voce vtitur Sidonius Apollinaris) quadrataria, cuius principium B, finis T, puncta parodica O P Q & ſimilia, incidentes à centro ad quadratariam AB AP AQ & ſimiles, quarum maxima eſt AB ſemidiameter, minima AT.

PROPOSITIO II.

Si ex centro circuli incidant in quadratariam lineæ rectæ, & à puncto incidentiæ demittantur in diametrum, in quâ deſinit quadrataria, perpendiculares, Demiſſæ ſunt ſimiles angulis quibus illæ ſubtenduntur.

Sit A centrum circuli BC quadrans totius circumferentiæ, AB AC ſemidiametri orthogoniæ. Et ad BC agantur ad quæcumque D E puncta circumferentiæ ſemidiametri AD AE, quas ducta quadrataria BT principium habens in B finem in T ſecet in FG. Et in AT demittantur perpendiculares FH GI. Dico eſſe vt FH ad GI ita angulum FAH ad angulum GAI. Cadant enim in AB perpendiculares FK GL. Quoniam igitur FG puncta ſunt parodica quadratariæ, ſecta eſt ſemidiameter BA in KL ſimiliter ac circumferentia BC in DE.



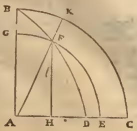
Itaque eſt vt BA ad KA ita circumferentia BC ad circumferentiam DC, & vt BA ad LA ita circumferentia BC ad circumferentiam EC. Quare eſt KA ad LA vt circumferentia DC ad circumferentiam EC. Et verò KA LA ſunt ipſis FH GI æquales. Et circumferentia DC eſt amplitudo anguli FAH & circumferentia EC amplitudo anguli GAI. Quare eſt vt FH ad GI ita angulus FAH ad angulum GAI. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO III.

Semidiameter circuli eſt media proportionalis inter quadrantem circumferentiæ, & minimam incidentium ex centro in quadratariam.

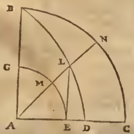
Sit A centum circuli, B C quadrans totius circumferentiæ, A B A C ſemidiametri orthogoniæ. Et ducatur quadrataria cuius principium B, finis D, vnde fit A D minima incidentium ex centro in quadratariá. Dico A B mediam eſſe proportionalem inter circumferentiam B C, & rectam A D, id eſt eſſe vt circumferentiam B C ad A B ita A B ad A D.

Si enim non ita ſit, eſto vt circumferentia B C ad A B ita A B ad A E, & centro A interuallo A E deſcribatur circulus abſcindens A B in G. Eſt igitur circumferentia B C ad circumferentiam G E ſicut ſemidiameter A C ad ſemidiametrum A E, Ex hypotheſi autem eſt circumferetia B C ad A C id eſt A B ſicut A C ad A E. Quare eſt circumferentia G E ad A E ſicut AC ad AE. Eſt igitur G E ipſi A C æqualis. Eſt autem A E maior ipſa A D vel minor.



Sit primùm maior. Secabit igitur G E quadratariam BD. ſecet in F, & cadat in A C perpendiculariter F H, & connectatur A F, & producatur ad circumferentiam B C quam ſecet in K. Eſt igitur B C ad K C, ſicut G E, id eſt A C, ad F E. B C. autem ad K C eſt ſicut B A ad F H erit igitur B A ad F H ſicut A C ad F E. Sed B A A C ſunt æquales F H igitur & F E eſſent quoque æquales. Hoc autem eſt abſurdum. Dupla enim F H duplo circumferentiæ F D inſcribitur. Cedit autem circumferentiæ inſcripta. Non eſt igitur A E maior quam ipſa A D.

Secundo ſit AE minor quam A D. Circulum igitur G E tangat ad E recta ſecans quadratariam in L. Et iungatur A L & producatur vt ante ad circumferentiam B C, quam ſecet in N, G E verò in M. Eſt igitur B C ad N C ſicut G E id eſt A C ad M E. B C autem ad N C eſt ſicut B A ad L E. Eſt igitur B A ad L E ſicut A C ad M E. Sed B A A C ſunt æquales. Aequales igitur quoque eſſent L E M E. Hoc autem eſt abſurdum. Dupla enim ipſius L E circumſcribitur duplo circumferentiæ M E. Præſtat autem circumferentiæ circumſcripta. Non eſt igitur A E minor quam ipſa A D. Cum itaque A E non ſit minor ipſa A D neque maior, eſt æqualis. Quare eſt vt B C ad AB ita A B ad A D. Quod erat oſtendendum.



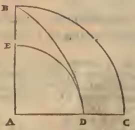
PROPOSITIO IIII.

Semidiameter circuli eſt æqualis quadranti circumferentiæ circelli homocentri interuallo æquali minimæ incidentium ex centro in quadratariam deſcripti.

Sit A centrum circuli B C quadrans totius circumferentiæ, A B A C ſemidiametri ortdogoniæ. Et ducatur quadrataria cuius principium B, finis D. & centro A interuallo A D deſcribatur circellus abſcindens A B in E, vnde fit E D quadrans to-

tius circumferentiæ circuli ſub A centro interuallo A D deſcripti Dico ſemidiametrum · A B eſſe circumferentiæ E D æqualem.

Eſt enim A C ſeu A B ad A D ſicut circumferentia B C ad circumferentiam E D. cum illæ rectæ ſint ſemidiametri ſuorum circulorum hæ circumferentiæ, & ſingulæ quadrantes ſui totius. Sed eſt quoque A B ad A D ſicut circumferentia B C ad A B ex iam demonſtratis. Ergo A B æqualis eſt circumferentiæ E D. Quod erat oſtendendum.



Atque his datæ quidem circumferentiæ licet inuenire lineam rectam æqualem atque adeo quadrare circulum, & quodlibet circuli ſegmentum. Et contra, datæ lineæ rectæ licet inuenire circumferentiam æqualem, & dato quadrato inuenire circulum æqualem. At vix dato quadrato inuenietur dati circuli ſegmentum æquale. Quod tamen opus conceſſis helicibus abſoluitur eo ipſo, quod ad ſupplementum Geometriæ inductum eſt, poſtulato. Itaque maiora ſunt helicis quam quadratariæ commoda. Sed & quadrataria eſt δυσμηχανωτέρα, quanquam fortaſſis non minùs feliciter quam helix æqualitatem lineæ rectæ & circumferentiæ comprobet.

Γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχουσαι. CAPVT IX.

CVm ab extremitate diametri circuli, ſectâ circumferentiâ in partes quotcumque æquales, educuntur rectæ per quælibet æqualium ſectionum puncta, eductas autem terminat helix ab eâdem extremitatate ducens exordium, fiunt γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχουσαι. quæ ad percipiendum vim helicis non infeliciter lineis rectis à circumferentiâ concluſis comparantur. Sed & hujuſmodi lineis æqualiter ſeſe excedentibus firmatur valde multangulorum numerorum doctrina, in quibus nulla non recondi myſteria Platonici teſtantur. Quamobrem περὶ ταυτὰς τὰς γραμμὰς ita propono.

PROPOSITIO I.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, ſit autem minima exceſſui æqualis, Eſt minima ad maximam, ſicut vnitas ad multitudinem Linearum.

Sit enim minima eadem & prima. Quoniam igitur prima eſt exceſſui æqualis, ſeipſam metitur vnitate, ſecundam binario, tertiam ternario, quartam quaternario, ac denique maximam ſui ordinis numero ſecundum naturalem progreſſum. Itaque quotus eſt exceſſus in maximâ, tot ſunt lineę, & conſtat propoſitum.

PROPOSITIO II.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, Eſt exceſſus ad differentiam maximæ continuatæ exceſſu, & minimæ, ſicut

vnitas

vnitas ad multitudinem linearum.

Sit enim minima eadem & prima. Differentia igitur primæ & ſecundæ erit exceſſui æqualis. Quare differentiam illam metitur exceſſus vnitate, differentiam verò primæ & tertiæ binario, differentiam primæ & quartæ ternario, differentiam primæ & quintæ quaternario, ac denique differentiam primæ & extremæ ſeu maximæ, ſui ordinis numero ſecundum naturalem progreſſum vnitate demptâ. Eſt igitur exceſſus ad differentiam maximæ & minimæ, ſicut vnitas ad multitudinem linearum vnâ demptâ, & per ſynæreſim, Eſt exceſſus ad differentiam maximæ continuatæ exceſſu & minimæ, ſicut vnitas ad multitudinem linearum accurate vt eſt enunciatum.

Sint numeri ſeptem progredientes per ternarij crementum, quorum primus eſt 1. & oporteat inuenire extremum. Fiet vt 1 ad 7 ita 3 ad 21. Quare 21. differentia erit inter extremum continuatum ternario & vnitatem. Continuatus igitur ternario extremus erit 22, accuratus 19.

Sint rurſus numeri progredientes per æquum ternarij crementum quorum primus eſt 1. extremus 19. Et oporteat inuenire multitudinem numerorum ita progredientium. Fiet vt 3. ad 21. ita 1. ad 7. Quare numerus 19 in ea progreſſione ſedem occupat ſeptimam.

PROPOSITIO. III.

Si fuerint quatuor lineæ, quarum primam tanto ſuperet ſecunda, quanto tertiam quarta, Compoſita ex extremis eſt æqualis compoſitæ è mediis.

Sit enim prima B, ſecunda B plus F, tertia D, Quarta igitur erit D, plus F ex lege propoſitionis. Compoſita autem ex extremis eſt B plus D, plus F, quanta etiam compoſita ex mediis. Itaque conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IIII

Si fuerint tres lineæ æqualiter ſeſe excedentes, Compoſita extremis eſt æqualis mediæ duplæ.

Sit enim prima B ſecunda B plus F, Tertia igitur erit B plus F bis. Compoſita autem ex extremis fit F bis, plus B bis, quanta etiam eſt media dupla. Itaque conſtat propoſitum.

PROPOSITIO V.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, Eſt compoſita ex extremis ad compoſitam ex omnibus duplam ſicut vnitas ad multitudinem linearum.

Multitudo enim linearum æqualiter ſeſe excedentium erit numero par, aut impar. Sit par, veluti ſint lineæ ſex, Prima igitur cum ſextâ, ſecunda cum quintâ, tertia cum quartâ erunt æquales inter ſe per propoſitioné tertiam. Sunt autem tres binæ lineæ. Quare compoſita ex primâ & ſexta ter ſumpta fiet compoſita ex omnibus, ſexies vero compoſita dupla. Eſt igitur compoſita ex prima & ſextâ, ad compoſitam ex omnibus, ſicut vnitas ad ſenarium.

Sit autem numerus linearum impar, veluti ſint ſeptem lineæ. Prima igitur cum ſeptimâ, ſecunda cũ ſextâ, tertia cum quintâ erũt inter ſe æquales. Sunt autem tres binæ lineæ, Qua-

re compoſita ex primâ & ſeptimâ ſexies ſumpta erit dupla compoſitâ ex omnibus, exceptâ mediâ ſeu quarta. Sed compoſita ex primâ & ſeptimâ æqualis eſt mediæ duplæ per propoſitionem quartam. Quare compoſita ex primâ & ſeptimâ ſepties ſumpta erit compoſita ex omnibus dupla accuratè. Eſt igitur compoſita ex primâ & ſeptimâ ad compoſitam ex omnibus duplam, ſicut vnitas ad ſeptenarium. Quæ demonſtrationis veritas in quotcumque aliis linearum numeris paribus imparibúſue eandem vim manifeſtò obtinet. Eſt igitur compoſita ex extremis ad compoſitam ex omnibus duplam, ſicut vnitas ad multitudinem linearum, quemadmodum eſt ordinatum.

PROPOSITIO VI.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, minima autem ſit exceſſui æqualis, Eſt vt minima ad maximam, ita compoſita ex minimâ & maximâ ad compoſitam ex omnibus duplam.

Per antecedentem enim propoſitionem eſt compoſita ex minimâ ad compoſitam ex omnibus duplam, ſicut vnitas ad multitudinem linearum. Per primam autem propoſitionem minima exceſſui æqualis eſt quoque ad maximam, ſicut vnitas ad multitudinem linearum. Quare eſt compoſita ex minimâ & maximâ ad compoſitam ex omnibus duplam, ſicut minima exceſſui æqualis ad maximam, vt hîc eſt ordinatum.

Sint numeri progredientes per vnitatis crementum. Primus 1. extremus 20. & oporteat inuenire ſummam omnium fiet vt 1 ad 20 ita 21 ad 420. Itaque 420 erit ſumma omnium dupla 210 ſimpla, eáque ducta in vnitatem dicitur numerus triangulus.

PROPOSITIO VII.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes. Eſt vt exceſſus ad differentiam maximæ continuatæ exceſſu & minimæ, ita compoſita ex minimâ & maximâ ad compoſitam ex omnibus duplam.

Per propoſitionem enim quintam eſt compoſita ex minimâ & maximâ ad compoſitâ ex omnibus duplam, ſicut vnitas ad multitudinem linearum. Per primam autem propoſitionem exceſſus ad differentiam maximæ continuatæ exceſſu & minimæ eſt quoque ſicut vnitas ad multitudinem linearum. Quare eſt compoſita ex minimâ & maximâ ad compoſitam ex omnibus duplam, ſicut exceſſus ad differentiam maximæ cótinuatæ exceſſu, & maximæ, vt hîc eſt ordinatum.

Sint numeri progredientes per ternarij crementum. Primus 1, extremus 10. & oporteat inuenire ſumm m omnium. fiet vt 3 ad 12 ita 11 ad 44. Itaque 44 erit ſumma omnium dupla, 22 ſimpla, & ea ducta in vnitatem dicitur numerus quinquangulus.

PROPOSITIO VIII.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, Quadratum maximæ continuatæ dimidio exceſſu æquale eſt duplo quod fit plano ſub compoſitâ ex omnibus & exceſſu, vnà cum quadrato differentiæ inter minimam & exceſſum dimidium.

Sit enim exceſſus F, minima B, compoſita ex omnibus G, maxima vero continuata

dimidio exceſſu ſit E. Ex antecedente igitur propoſitione eſt vt F ad E plus F ſemiſſe, minùs B, ita E minùs F ſemiſſe, plus B ad G bis. Quâ reſolutâ analogiâ E. Quadratum æquatur F in G bis, plùs quadrato differentiæ inter B & F ſemiſſem. Quod ipſum eſt quod ordinatur.

Sint numeri aliquot progredientes per quaternarij crementum, & horum primus 1 ſumma vero omnium 120. (Is autem ductus in vnitatem dicetur ſexangulus. Exceſſus enim adſcito binario multitudinem angulorum exprimit.) Et oporteat inuenire latus numeri illius ſexanguli. Primum igitur quæretur gnomon extremus, id eſt maximus in ea progreßione numerus. Itaque ille continuatus dimidio progreßionis cremento id eſt binario ſit 1 N. Ergo ex hac propoſitione 1 Q. æquabitur 961. 1 N eſt 31, gnomon extremus 29. Cum igitur primus ſit 1, extremus 29 crementum gnomonum per monadas quatuor fiet per propoſitionem ſecundam vt 4 ad 32 ita 1. ad 8. Itaque 8 eſt latus quæſitum propoſiti 120 ſexanguli.

PROPOSITIO IX.

Si fuerint tres lineæ æqualiter ſeſe excedentes, Octuplum quod fit planum ſub media & maximâ, adiunctum minimæ quadrato, æquatur quadrato compoſitæ ex maximâ & mediâ duplâ.

Minima enim eadémque prima trium linearum ſeſe æqualiter excedentium ſit B. exceſſus F. Secunda igitur erit B plus F. Tertia B plus F bis. Quod autem fit planum ex B plus F in B plùs F bis, ipſum (vt ex logiſticâ ſpecioſâ euidens fit) octies ſumptum & adiunctum B quadrato facit quadratum abs radice B ter, plus F quater, quanta eſt compoſita ex maximâ & mediâ duplâ. Quare conſtat propoſitum.

PROPOSITIO X.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, ſit autem minima exceſſui æqualis, Eſt vt minima ad maximam ita quadratum compoſitæ ex minimâ & maximâ, adiunctum plano ſub eâdẽ compoſitâ & maximâ ad adgregatum quadratorum à ſingulis ſextuplum

Illud ipſum eſt quod tradit Archimedis propoſitione XX περὶ ἑλικῶν.

Oporteat inuenire ſummam omnium quadratorum quæ fiunt à ſingulis lateribus ab 1. ad 9. Fiet vt 1 ad 9 ita 190 ad 1710. Itaque 1710 ſumma erit ſextupla ad ſummam quadratorum quæſitam, quæ ideo eſt 285.

PROPOSITIO XI.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, Eſt vt vnitas ad multitudinem linearum vnâ demptâ, ita quod fit planum ſub maximâ & minimâ, adiunctum trienti quadrati differentiæ inter maximam & minimam, ad planum maius quàm adgregatum quadratorum à ſingulis lineis, multatum quadrato maximæ ſed minùs quàm adgregatum idem, multatum quadrato minimæ.

Illud quoque ipſum eſt quod tradit Archimedes proſitione XXI. περὶ ἑλικῶν.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, ſit autem minima exceſſui æqualis, Eſt vt minima ad maximam, ita Solidum quod fit ſub maximâ & quadrato compoſitæ ex minimâ & maximâ, ad adgregatum Cuborum à ſingulis quadruplum.

Eſt enim minima ad maximâ, ſicut compoſita ex maximâ & minimâ, ad compoſitam ex omnibus duplam, & omnibus quadratis, eſt quadratum minimæ,ad quadratum maximæ,ſicut quadratum compoſitæ ex minimâ & maximâ, ad quadratum compoſitæ ex omnibus duplæ. Et conſequenter eſt minimâ ad minimâ, ſicut ſolidũ ſub maximâ, & quadrato compoſitæ ex maximâ & minimâ ad ſolidum ſub primâ & quadrato compoſitæ ex omnibus duplæ. Sed ſolidum ſub primâ & quadrato compoſitæ ex omnibus, eſt æquale adgregato cuborum à ſingulis (id enim oſtenſum eſt in Zeteticis.) Ergo conſtat enunciatum.

Oporteat inuenire ſummam omnium cuborum qui fiunt à ſingulis lateribus ab 1 ad 9 fiet vt 1 ad 9 ita 900 ad 8, 100. Itaque 8100 ſumma erit quadrupla ad ſummam cuborum quæſitam, quæ ideo eſt. 2025.

PROPOSITIO XIII.

Et ſi fuerint lineæ quotcumque ſeſe excedentes, ſit autem prima exceſſui æqualis, fiunt abiis quatuor ſolida continuè proportionalia, qualia ſequuntur.

Primum, Cubus minimæ.

Secundum, Cubus compoſitæ ex maximâ & minimâ, multatus adgregato cuborum minimæ & maximæ.

Tertium, Adgregatum cuborum è ſingulis ter duodecuplum.

Quartum, Cubus compoſitæ ex omnibus ſextuplæ.

Oſtenſum enim quoque eſt Zeteticis ſolidum quod fit ſub quadrato minimæ, & compoſitâ ex omnibus ſeptuplâ, adiunctum cubo è minima æquari differentiæ inter cubum compoſitæ ex maxima & minima & cubum maximæ. Itaque per tranſlationem ſub contraria adfectionis nota ſolidum quod fit ſub quadrato minimæ & compoſita ex omnibus ſeptupla, æquat cubum compoſitæ ex maxima & minima, multarum adgregato cuborum minimæ & maximæ. Quare cum ponitur minima, vt prima continuè proportionalium. Compoſita verò ex omnibus ſextupla, vt quarta, latus cubi æquantis cubum compoſitę ex maxima & minima, multatũ adgragato cuborum minimę & maximæ, fiet ſecunda. Et cum ſingulæ illa proportionales ducentur cubicé, fient quoque cubi illi proportionales. Aequè quoniam ſolidum quod fit ſub minima, & quadrato compoſitæ ex omnibus æquatur adgregato cuborum è ſingulis, ideò cum ponitur minima vt prima quatuor continuè proportionaliũ, compoſita verò ex omnibus ſextupla, vt quarta, latus cubi æquantis ter duodecuplum adgregatum cuborum è ſingulis fiet tertia. Et cum ſingula illæ proportionales ducentur cubicè, fient quoque cubi illi proportionales. Et conſtat propoſitum.

Sit minima 1. maxima 4. Summa omnium ſextupla fit 60. Et ſunt continuè proportionalia ſolida, 1 60, 3600, 216 000.

Addatur ad illuſtrandum locum Plutarchi Platonicâ quæſtione quartâ cum inquit πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς ὀκτάκις γενόμενος καὶ μονάδα προσλαβὼν γίνεται τετράγωνος.

PROPO-

PROPOSITIO XIIII.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter ſeſe excedentes, ſit autem prima exceſſui æqualis, Octuplum eius quod fit ſub minimâ & compoſitâ ex omnibus, adiunctum minimæ quadrato, æquatur quadrato compoſitæ ex minimâ & extremâ duplâ.

Linearum enim æqualiter ſeſe excedentium minima, eademque exceſſui æqualis ſit X, maxima vero D. Duplum igitur eius quod fiet ſub minimâ & maximâ erit D quadratum, plus X in D. Octuplum vero addito minimæ quadrato, erit D quadratum quater, plus X in D quater, plus X quadrato. Quod ipſum eſt quadratum à binomiâ radice D bis plus X. Itaque conſtat propoſitum.

Sit X 1, D 9 compoſita ex omnibus dupla erit 90. Itaque numerus triangulus eſt 45 cuius octuplum adſciſcens vnitatem vt planum, facit 361 quadratum à 19 radice compoſita ex duplâ ipſius 9 & vnitate.

Progreſſio linearum rectarum quæ circumferentiis circuli ſubtenduntur.

CAPVT X.

IN recognitione Canonis Mathematici, & vniuerſalium ad eundem inſpectionum ſingularis libri (is enim infeliciter editus eſt anno 1579) repetiui, ac in breuem Epitomem congeſſi Analytica fere omnia quæ pertinent ad generale, quod aperui, myſterium angularium ſectionum. Verumtamen hic etiamnum erit vtilis & iucunda recordatio eorum theorematum, quibus progreſſio manifeſta fit linearum rectarum quæ circumferentiis circuli ſubtenduntur, commodè deinceps per ſpirica diagrammata cum progredientibus Arithmeticè comparandarum.

THEOREMA I.

Καθολικόν *Ad triangula rectangula quorum anguli acuti ſe habent inter ſe vt numerus ad numerum.*

Si fuerint duo triangula rectangula quorum angulus acutus primi ſit ſub-multiplus ad angulum acutum ſecundi, Latera ſecundi recipiunt hanc multitudinem.

HYPOTENVSA fit ſimilis Poteſtati conditionariæ Hypotenuſæ primi. Eſt autem Poteſtas conditionaria quæ ſequitur gradum proportionis multiplæ. Quadratum videlicet in ratione duplâ, Cubus in triplâ, Quadrato-quadratum in quadruplâ, Quadrato-cubus in quintuplâ & eo in infinitum progreſſu.

Ad ſimilitudinem autem laterum circa rectum Hypotenuſæ congruentium, efficitur à baſe & perpendiculo primi vt binomiâ radice, Poteſtas æque alta, & ſingularia facta homogenea diſtribuuntur in

duas partes ſucceſſiuè, vtrobique primum adfirmata, deinde negata. Et harum primæ parti ſimilis fit BASIS ſecundi. PERPENDICVLVM reliquæ.

Sic in ratione duplâ, HYPOTENVSA ſecundi fit ſimilis. Quadrato Hypotenuſæ primi, ſeu aliter, adgregato quadratorum à lateribus circa rectum, BASIS differentiæ, PERPENDICVLVM duplo ſub prædictis lateribus rectangulo.

In ratione triplâ, HYPOTENVSA ſecundi fit ſimilis Cubo Hypotenuſæ primi, BASIS, Cubo baſis primi, minùs ſolido ter ſub quadrato perpendiculi primi & baſe eiuſdem. PERPENDICVLVM ſimile ſolido ter ſub perpendiculo primi & quadrato baſis eiuſdẽ, minùs cubo perpendiculi.

In ratione quadruplâ, HYPOTENVSA ſecundi fit ſimilis Quadrato-quadrato Hypotenuſæ primi. BASIS, Quadrato-quadrato baſis primi, minùs plano-plano ſexies ſub quadrato perpendiculi primi & quadrato baſis eiuſdẽ, plus quadrato-quadrato perpendiculi. PERPENDICVLVM ſimile plano-plano quater ſub perpendiculo primi & cubo baſis eiuſdem, minùs plano-plano quater ſub cubo perpendiculi primi & baſe eiuſdem.

In ratione quintuplâ, HYPOTENVSA ſecundi fit ſimilis Quadrato-cubo Hypotenuſæ primi, BASIS ſimilis Quadrato-cubo baſis primi, minùs plano-ſolido decies ſub cubo perpendiculi primi & quadrato baſis eiuſdem, plùs plano-ſolido quinquies ſub perpendiculo primi, & quadrato-quadrato baſis eiuſdem. PERPENDICVLVM, plano-ſolido quinquies ſub quadrato-quadrato perpendiculi primi & baſe eiuſdem, minùs plano-ſolido decies ſub quadrato perpendiculi & cubo baſis eiuſdem, plùs quadrato-cubo baſis eiuſdem.

Trianguli rectanguli de angulo acuto enunciandi proponatur HYPOTENVSA Z, BASIS D, PERPENDICVLVM B. Et oporteat conſtituere triangula rectangula anguli dupli, tripli, quadrupli, quintupli, &c.

Ad triangulum anguli dupli fit HYPOTENVSA ſimilis Z quadrato. BASIS D quadrato, minùs B Quadrato. PERPENDICVLVM B in D bis.

Ad triangulum anguli tripli fit HYPOTENVSA ſimilis Z cubo. BASIS D cubo, minùs B quadrato in D ter. PERPENDICVLVM B in D quadratum ter, minùs B cubo.

Ad triangulum anguli quadrupli fit HYPOTENVSA ſimilis Z quadrato-quadrato. BASIS D quadrato-quadrato. B quadrato in D quadratum 6, plùs B quadrato-quadrato. PERPENDICVLVM B in D cubum 4, minùs B cubo in D 4.

Ad triangulum anguli quintupli fit HYPOTENVSA ſimilis Z quadrato-cubo. BASIS D quadrato-cubo, minùs B quadrato in D cubum 10, plùs B quadrato-quadrato in D 5. PERPENDICVLVM B in D quadrato-quadratum 5, minùs B cubo in D Quadratum 10, plus B quadrato-cubo.

Proponatur triangulum rectangulum cuius baſis 10, perpendiculum 1. & angulus acutus eiuſdem intelligatur ſimplus.

Ad triangulum anguli dupli ſtatuetur baſis 99 perpendiculum 20.

Ad triangulum anguli tripli ſtatuetur baſis 970. perpendiculum 299.

Ad triangulum anguli quadrupli ſtatuetur baſis 9401 perpendiculum 3960.

Ad triangulum anguli quintupli ſtatuetur baſis 90, 050 perpendiculum 49001.

Et cum angulus acutus primi trianguli deprehendetur eſſe.

		Partium	I	II.
		5	42	38
Erit angulus acutus	*ſecundi*	11	25	16
	tertij	17	7	54
	quarti	22	50	32
	quinti	28	33	10

Cum autem factorum nequit fieri ſubtractio argumentum eſt angulum multiplum eſſe obtuſum. Eóque caſu nihilominùs exceſſus factorum adſignabitur lateri, & angulus ſubtenſus intelligitur exterior multipli.

ALITER.

Si fuerint triangula rectangula quotcumque, & horum ſecundi angulus acutus ſit duplus ad acutum primi, tertij triplus, quarti quadruplus, quinti quintuplus, & eo continuo naturali progreſſu, Primi autem trianguli perpendiculum ſtatuatur, Prima proportionalium, baſis eiuſdem Secunda, eáque ſeries continuetur.

In ſecundo, erit baſis ad perpendiculum, vt Tertia, minùs Primâ, ad Secundam bis.

In tertio, vt Quarta, minùs Secundâ ter, ad Tertiam ter, minùs Primâ.

In quarto, vt Quinta, minùs Tertiâ ſexies, plùs Primâ, ad Quartam quater, minùs Secundâ quater.

In quinto, vt Sexta, minùs Quartâ decies plùs Secundâ quinquies, ad Quintam quinquies, minùs Tertiâ decies, plus Primâ.

In ſexto, vt Septima, minùs Quintâ quindecies, minùs Tertiâ quindecies, plùs Primâ, ad Sextam ſexies, minùs Quartâ vicies, plus Secundâ vicies.

In ſeptimo, vt Octaua, minùs Sextâ vicies ſemel, plus Quartâ tricies quinquies minus ſecunda ſepties, ad Septimam ſepties minùs Quintâ tricies quinquies, plùs Tertiâ vicies ſemel, minùs Primâ.

Et ita in infinitum diſtributis ſucceſſiuè in duas partes proportionalibus ſecundum earum ſeriem, vtrobique primùm adfirmatis deinde negatis, & ſumptis multiplicibus, vt ordo graduũ in artificioſa geneſi poteſtatum, quibus eæ addicuntur, exigit.

THEOREMA II.

Si à termino Diametri ſumantur in circulo circumferentiæ quot-

cumque æquales, & ab alterâ extremitate educantur lineæ rectæ ad ſumptarum circumferentiarum æqualium terminos, Eductæ fiunt baſes triangulorum rectangulorum, quorum communis hypotenuſa eſt diameter. Ac baſis quidem Diametro proximior intelligitur baſis anguli ſimpli, ſuccedens dupli, & eo continuo ordine. Conſtituatur autem ſeries linearum rectarum continuè proportionalium, quarũ Prima ſit æqualis ſemidiametro. Secunda baſi anguli ſimpi, Is reliquarum baſium ordine ſuccedentium erit progreſſus.

Tertia continuè proportionalium, minus Primâ bis, erit æqualis baſi anguli dupli.

Quarta, minus Secundâ ter, baſi anguli tripli.

Quinta minùs Tertiâ quater, plus Primâ bis, baſi anguli quadrupli.

Sexta minùs Quartâ quinquies, plus Secundâ quinquies, baſi anguli quintupli.

Septima, minùs Quintâ ſexies, plus Tertiâ nouies, minùs Prima bis, baſi anguli ſextupli.

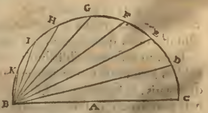
Octaua, minùs Sextâ ſepties, plus Quartâ quater decies, minus Secunda ſepties, baſi anguli ſextupli.

Nona, minus Septimâ octies plùs Quintâ vicies minus Tertia vicies plus Primâ bis, baſi anguli octupli.

Decima, minùs Octauâ nouies, plus Sextâ vicies ſepties, minus Quarta tricies, plus Secunda nouies, baſi anguli nouemcupli, & ita in infinitum, vt per loca proportionalium imparia noua adfectio ſuccedat, adfirmatæ videlicet negata, negatæ adfirmata. Ac proportionales illæ ſint ſemper alternæ, & multiplices quidem in prima adfectione per vnitatis crementum, in ſecunda per numeros triangulos, in tertia per numeros quos vocant pyramidales, in quarta per numeros triangulo-pyramidales & ita continuè, ſecundum poteſtatis, cui proportionalis addicta eſt, conditionem.

Vt hæc in Analyticis abunde, ſufficientérque demonſtrata & expoſita ſunt.

Sit circulus ſub A centro, diametro BC, *deſcriptus & ſumantur circumferentiæ æquales* CD *&* DE, EF, FG, GH, HI, IK, *& ſubtendatur* BD BE BF BG BH BI BK, *ſit autem dimidia* BC *partium* 100, 000. BD *partium* 196. 000. *Et ad datas primam* BC *ſecundam* BD *conſtruantur proportionales continuè. Vnde fit*



Prima

Prima	100 000	000 000 000
Secunda	196 000	
Tertia	384 160	
Quarta	752 953	6
Quinta	1 475 789	056
Sexta	2 892 546	549 76
Septima	5 669 392	237 529 6
Octaua	11 112 006	825 558 016

Qualium igitur eſt recta

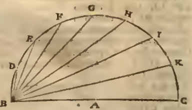
BC BG	200 000	000 000 000
BD BC	196 000	

Erit BE	184 160	
BF	164 953	6
BG	139 159	056
BH	107 778	549 76
BI	72 096	901 529 6
BK	33 531	377 238 016

THEOREMA III.

Si ſecetur ſemi-circumferentia circuli in partes quotcumque æquales, & à termino Diametri educantur rectæ ad quælibet ſectionum puncta, Eſt vt minima educta ad Diametrum, ita compoſita ex diametro, & minimâ, & eâ inſuper, cuius quadratum adiunctum minimæ quadrato efficit quadratum diametri, ad compoſitam ex omnibus eductis duplam.

Sit circulus ſub A centro, diametro BC deſcriptus. Secetur autem circumferentia BC in partes quotcumque æquales, vt pote octo, & ſint illæ BD, DE, EF, FG, GH, HI, IK, KC, & ſubtendantur BD BE BF BG BH BI BH. Eſt igitur BK æqualis ſubtenſæ DC cuius quadratum adiunctum quadrato ex DB æquale eſt quadrato ex BC. Dico eſſe vt BD ad BC, ita compoſitam ex BC BD BK ſeu BC ad compoſitam ex omnibus duplam, videlicet compoſitam duplam ex BD BE BF BG BH BI BK BC, vt hæc abunde demonſtrata ſunt, & expoſita in Analyticis angularium ſectionum.



Eſt conditus Canon ſinuum per ſingula ſexageſima ſcrupula partium quadrantis circuli in partibus qualium ſinus totus adſumitur 100, 000, 000. Quærit aliquis ſummam omnium ſinuum ſingulis ſcrupulis congruentium. Quoniam igitur eſt vt ſinus vnius ſcrupuli ad ſinum totum, ita ſinus vnius ſcrupuli ſinus complementi & ſinus totus ad ſinum totum proſinum complementi & tranſſinuoſam complementi, Addat logiſta tranſſinuoſam complementi vnius ſcrupuli ſuo congruenti proſinui, & inſuper ſinui toto, & conflabitur duplum ſumma quæſita. Tranſinuoſas, videlicet, voco hypotenuſas, quas ſuppeditat Canon fecundiſsimus, Proſinus, latera circa rectum, quæ Canon fecundus.

Tranſſinuoſa igitur complementi vnius ſcrupuli numeratur.	343, 774, 681, 923
Proſinus vero,	343, 774, 667, 379
His addatur ſinus totus.	100, 000, 000
Summa fit	687, 649, 349, 302

Eſt igitur 343, 814, 674, 651 ſumma omnium ſinuum ſcrupulorum quadrantis, ipſo ſinu AC partium numerato, tam accurata quam patitur in eâ hypotheſi linearum ſymmetria.

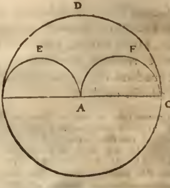
Arbeli, & Lunularum quadrationes aliquæ. CAPVT IX.

LVnulam vnam quadrauit Hippocrates Chius. Lunulas autem poſt Hippocratem quadrauit nullus Geometra. Neque enim Analyticum quadrandi Lunulas hactenus propoſitum fuit à quopiam artificium. Ergo vniuerſalia vniuerſaliter docenda ſunt, & quadrandæ non vna, ſed infinitæ eâdem & generali methodo Lunulæ. Primùm autem proponam de Arbelo.

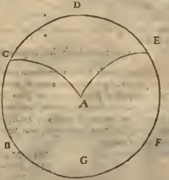
PROPOSITIO I.

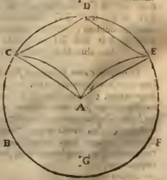
Arbelum deſcribere cui Rectilineum exhibeatur æquale.

Τοῖς ἀρβήλοις σμίλαις καὶ ξύστροις οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξέουσι τὰ δέρματα. Sunt autem Arbeli ſeu arbela τὰ κυκλότερα σιδήρια, vt adnotauit Scholiaſtes Nicandri. Itaque Proclus apellauit Arbelum ſpacium tribus circumferentiis comprehenſum. Vt ecce, deſcribatur circulus ſub A centro, & agatur diameter BAC, & fiant AB AC ſingulæ dimetientes circulorum, ipſique deſcribantur circuli. Sunt igitur ſemicircumferentiæ ſuorum circulorum, ſingulæ BC BA AC curuæ lineæ. Quapropter ſpacium CDBEAF eſt Arbelus ſcalprúmue ſutorium. Figuram autem Arbeli Proculianam imitatur Arbelus alter, quem ita deſcribimus.



Sub A centro, interuallo AB deſcribatur circulus, cuius circumferentia ſecetur in partes ſex æquales, quæ ſunto BC CD DE EF FG GB, & centro B interuallo BC, & centro F interuallo FE deſcribantur circuli, atque adeo circumferentiarum ſuarum ſextantes ſunto CA AE. Spaciũ igitur DCAE eſt Arbelus noſter, cui Rectilineum ita licet exhibere æquale. Subtendantur enim CD DE CA AE. Dico quadrangulum CDEA æquari deſcripto Arbelo DCAE. Aequales enim circumferentiæ ſunt CD DE CA AE, ſingulæ videlicet ſextantes totius perimetri ſuorum circulorum, qui quidem circuli ſunt æquali interuallo deſcripti, ideoque inter ſe æquales. Quantas igitur partes Arbeli auferunt tmemata CD DE, tantas reſtituunt æqualia quoque tmemata CA, AE. Quod enim recta CD circumferentiam CA non ſecet, ideò manifeſtum eſt, quia anguli DCA duplam amplitudinem definit circumferentia DEF, Ita-





que angulus DCA continet ἥμισυ τῆς ὀρθῆς. Quòd ſi CD ſecaret circumferentiam CA, angulis DCA amplitudo minor eſſet circumferentiâ DEF dimidiâ CA. Non igitur recta CD ſecat circumferentiam CA, & locus eſt omnino expoſitæ poſtaphæriſi, atque adeo iuſtæ expoſiti Arbeli quadrationi.

PROPOSITIO II.

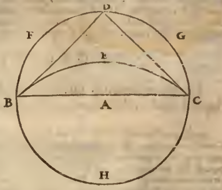
Ex circumferentiis duorum circulorum exiſtentium in ratione duplâ Lunulam deſcribere, cui Rectilineum exhibeatur æquale.

Μηνίσκους adnotauit Suidas dici τὰ τοῦ κύκλου σιδήρεια παρὰ τοῖς φιλοσόφοις. At apud Geometras μηνίσκος ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ δύο περιφερειῶν, vel δύο κύκλων μὴ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων ὑπεροχὴ κοίλης καὶ κυρτῆς, vel τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο περιφερειῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἐχουσῶν. Στεφάνη excellus eſt duorum circulorum circa vnum idemque centrum. Πελεκὺς figura comprehenſa quatuor circumferentiis, duabus concauis, & duabus conuexis. Ac Meniſcum quidem ſiue Lunulam quadrauit Hippocrates Chius conflatam ex circumferentiâ duorum circulorum exiſtentium in ratione duplà. At figuris στεφανοειδεῖς καὶ πελεκοειδεῖς quadrauit nemo artificioſè, vt neque circulos neque circulorum τομέας καὶ τμήματα. Cauſa eſt quòd perimetri ad circulum analogia ἐν θεῶν γούνασι κεῖται. Ita autem quadrantur Lunulæ, vt ex ſyncriſi περιφερογράμμων cum περιφερογράμμοις, non etiam cum εὐθυγράμμοις demonſtratio pendeat, vt ante expoſita quadratio Arbeli demonſtrata eſt κατ᾽ ἐφάρμοσιν ex collatione æqualium in æqualibus circulis ſegmentorum. Enimuero oportet facere quod hic propoſitum eſt, omnino artificium analyticum erit huiuſmodi.

Quoniam figura proponitur deſcribenda duabus comprehenſa circumferentiis duorum circulorum exiſtentium in ratione duplâ, ita vt ei figuræ Rectilineum poſſit exiberi æquale, eo reducitur res vt in expoſito quolibet circulo ſit ſecanda bifariam circumferentia, cui quæ ſubtenditur recta ad ſubtenſam dimidio eiuſdem circumferentiæ ſit quadraticâ poteſtate in ratione duplâ, vt pote in circulo ſub A centro deſcripto aliqua circumferentia BC. ita ſecanda eſt bifariam in D, vt ſit quadratum ex ſubtenſâ BD ad quadratum ex ſubtenſâ BC ſicut vnum ad duo. Cum enim per puncta BC deſcribetur circulus à cuius dimetiente quadratum ſit ad quadratum à dimetiente circuli habentis A centrum, ſicut duo ad vnum, deſcribetur Lunula DBEC, ipſique rectilineum licebit exhibere æquale. Quoniam enim circuli, cuius BAEC eſt ſegmentum, quadratum ad quadratum circuli habentis A centrum eſt vt duo ad vnum, ideo circulus ille huius eſt duplus. Et cum ſit eadem ratio totius ad totum quæ partis ad partem, eſt autem EBAC ſegmentum circuli ſimile ſegmento FBD, ſeu GDC. Ideo ſegmentum EBAC. æquabit ambo ſegmenta FBD GDC. Et verò recta BD circumferentiam non ſecat, quia anguli DBC duplam amplitudinem definit circumferentia DGC, Itaque angulus DBC æquat dimidiam circumferentiam BEC, cum ſint BEC DGC ſimiles circumferentiæ ſuorum circulorum. Quod ſi recta BD ſecaret circumferentiam BEC, angulus DBC minor eſſet dimidiâ circumferentiâ BEC. Sunt autem DG BD æquales, & ſimiliter ſitæ. Itaque recta quoque DC circumferentiam BEC non ſecat. A Lunulâ igitur DBEC auferantur DFB DGC, & reſtituantur additione ſegmenti EBAC, fit rectilineum triangulum DBC æquale deſcriptæ Lunulæ DBCE. Quæ cum ita ſeſe habeant, eſto iam factum quod quæritur, ſit nempe circumferentia BDC ſecta bifariam in D ita vt quadratum à ſubtenſâ BD deſcriptum ad quadratum à ſubtenſâ BC ſit ſicut vnum ad duo. Quantarum igitur partium quadratum à BC eſt 2, tantarum quadratum à BD eſt 1. & à DC quoque 1. Ergo trianguli BDC quadrata à lateribus BD DC æqualia ſunt quadrato à latere BC.

Rectangulum eſt igitur triangulum BDC angulum ad D habens rectum. Conſequenter BC dimetiens eſt ipſiùs in quo triangulum inſcribitur circuli. Quare ad compoſitionem exponatur circulus cuius A centrum, & ipſius circumferentia ſecetur quadrifariam in punctis B, D, C, H. & centro H interuallo HB vel HC deſcribatur circulus alter, fit igitur Lunula DBEG à duobus circulis exiſtentibus in ratione duplâ. Quadratum enim à latere tetragoni inſcripti circulo deſcriptum duplum eſt quadrati à ſemidiametro deſcripti. Sed & circumferentia BDC dupla eſt ad circumfe-

rentiam BEC. Rectus enim eſt angulus BHC, cuius amplitudinem definiuit circumferentia BEC, quadrans ideo totius circumferentiæ ſui circuli, & ſimilis circumferentiæ DGC. Dico itaque Lunulæ DBEC Rectilineum exhiberi æquale. Subtendantur enim BC BD CD, fit triangulum rectangulum BDC. Et quoniam ſimiles ſunt circumferentiæ BFD DGC BED, latera BD DC non ſecabunt circumferentiam BEC. Circuli autem circulorumue ſimiles ſectores, ſimiliaque ſegmenta ſunt vt à diametris quadrata. Segmentum igitur EBG duplum eſt ad ſegmentum FBD ſeu GDC, & illud hæc ambò adæquat. Et verò triangulum BDC aufert à Lunulâ ſegmenta FBD GDC, adſumit vero ſegmentum EBC ea adæquantem. Lunulæ itaque DBEC exhibetur æquale Rectilineum, triangulum videlicet rectangulum DBC. Quod facere oportebat.

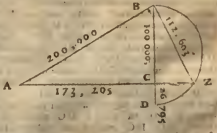


Non diſſimili methodo quadrabit Analyſta Lunulam cunflatam ex circumferentiis duorum circulorum exiſtentium in ratione triplâ & quadruplâ aliterue multiplâ edoctus progreſſionem ſubtenſarum. Deinde opus retexenti licebit per ſyntheſim (vti iam in ratione triplâ & quadruplâ edo exemplum,) ſuum inuentum ordinare.

PROPOSITIO III.

In circulo duas circumferentias ſumere exiſtentes in ratione triplâ in quâ etiam ſe habeant rectarum quæ ipſis circumferentiis ſubtenduntur quadrata.

Exponatur triangulum rectangulum ABC, habens angulum ad C rectum, angulum vero ad A trientem recti. Eſt igitur quadratum ex BC ad quadratum ex AC, vt vnum ad tria. Producatur autem BC in D, poſitâ CD æquali exceſſui quo AB hypotenuſa trianguli præſtat AC baſi, & ſumatur media proportionalis inter BC BD, & ſit BZ. Sumpto denique quouis centro & interuallo æquante BC perpendiculum expoſiti trianguli, deſcribatur circulus, in cuius circumferentiâ inſcribantur rectæ FG GH HI ipſi BZ æquales, & ſubtendatur FI. Eſt igitur circumferentia FI ad circumferentiam FG tripla. Dico ſimiliter quadratum ex ſubtenſa FI ad quadratum ex FG eſſe quoque triplum. Agatur enim diameter FM. Quoniam circumferentia FGHI tripla eſt ad circumferentiam FG, ideo eſt FG ad FI, ſicut quadratum ex FM ad quadratum triplū ex FM, minùs quadrato quadruplo ex FG. Id enim expoſitum eſt in Analyticis angulatium ſectionum. Et ideò cum ſit FB conſtructa ipſi EZ æqualis, FM verò dupla ipſius BC eſt BZ ad FI ſicut quadratum ex BC ad quadratum triplum ex BC minùs quadrato ex BZ. Et cum quadratum ex BZ æquale ſit ei quod ſit ſub BD BC eſt BZ ad FI ſicut BC ad BC triplum minùs BD. Ipſa porro BD valet BC ter minùs AC. Compoſita enim eſt BD ex BC. CD. Ipſaque CD conſtructa eſt æqualis exceſſui quo AB, id eſt dupla BC, præſtat ipſi AC. Ergo eſt BZ



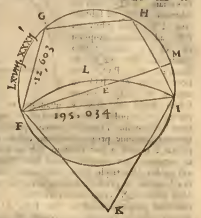
ad

ad FI ſicut BC ad AC. Sed quadratum ex BC ad quadratum ex AC eſt vt vnū ad tria. In circulo igitur ſub L centro deſcripto ſumptæ ſunt duo circumferentiæ FG FI quarum hæc ad illam eſt tripla ſicut etiam triplum eſt quadratum FI ad quadratum FG. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO IIII.

Ex circumferentiis duorum circulorum exiſtentium in ratione triplâ lunulam deſcribere, cui rectilineum exhibeatur æquale.

Exponatur circulus quilibet ſub L centro deſcriptus in quo ſumatur circumferentia FI, cui quæ ſubtenditur ad ſubtenſam eiuſdem circumferentiæ trienti ſit quadraticâ poteſtate vt tria ad vnum. Deinde per puncta FI interuallo KI, vel FK ſumpto æquali latere trigoni eidem circulo FI inſcripti deſcribatur circulus alter FLI ſub K centro. Secetur autem circumferentia FI trifariam in punctis G, H, I & ſubtendantur trientes illi FG GH HI ac denique FI. Dico factum eſſe quod oportuit. Deſcriptam enim eſſe lunulam GFLI conflatam ex circumferentiis FGI FLI ad duos circulos in ratione tripla exiſtentes, pertinentibus, ita vt ei rectilineum exhibeatur æquale. Ipſi namque lunulæ GFLI æquale eſſe rectilineum quadrilaterum FGHI.



Quoniam enim circulo FGI inſcripta FI ad inſcriptam FG eſt quadraticâ poteſtate vt tria ad vnum, itaque longitudine eſt vt latus trigoni eidem circulo inſcripti ad ſemidiametrum. Quâ in ratione conſtituta eſt ſemidiameter circuli FLI ad ſemidiametrum circuli FGI. Igitur circulus FLI ad circulum FGI triplam habet rationem. Et ſegmentum LFI ſimile ſit ſegmento FGI, valetque triplum ſegmenti FGI. Atque adeo ipſa ſegmenta tria inter ſe æqualia FG GH HI. Neque vero HI recta, nedum rectæ GH. FG, ſecabit circumferentiam FLI propter ſimilitudinem circumferentiarum FG FI, ex iam demonſtratis. A lunulâ igitur GFLI auferantur ſegmenta FG GH HI. Addatur verò ſegmentum LFI. Tantumdem ergo lunulæ GFLI ſuplet ſegmentum FIL quantum eidem lunulæ adimunt ſegmenta FG GH HI. Rectilineum itaque quadrilaterum FGHI lunulæ LFGI circulorum à circumferentiis duorum circulorum exiſtentiū in ratione tripla deſcriptæ effectum eſt æquale ſicut oportebat.

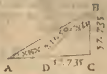
PROPOSITIO V.

In circulo duas circumferentias ſumere exiſtentes in ratione quadruplâ, in quâ etiam ſe habeant rectarum, quæ ipſis circumferentiis ſubtenduntur, quadrata.

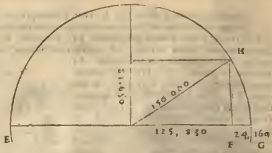
Exponatur triangulum rectangulum ACB habens angulum ad C rectum. Et ex AC abſcindatur CD ipſi BC æqualis & iungatur. BD. Ad datam vero EG compoſitam ex triplâ AC, vt adgregatum extremarum in ſerie trium linearum rectarum continuè proportionalium, & datam quoque HF ipſi BD æqualem vt mediam trium illarum inueniantur extremæ CF GF. Et rurſus inter ipſas EF. FG inueniantur duæ mediæ continuè proportionales LK KF. Cùm autem quadratum compoſitæ ex LK

x

KF auferetur à quadrato duplæ AC relinquat quadratum ex MN.



Et centro O interuallo OP ſumpto æquali ipſi AC deſcribatur circulus, cui inſcribantur PQ, QR, RS ST ipſi MN æquales. Eſt igitur circumferentia PT ad circumferentiam PQ quadrupla. Subtendatur autem PΓ. Dico quadratum ex ſubtenſa PT eſſe quoque quadruplum quadrati ex ſubtenſa PQ, id eſt, longitudinem PT ad longitudinem PQ eſſe duplam.



Agatur enim diameter POX & ſubtendatur QX. Eſt igitur QX æqualis ipſi MN, & quoniam circumferentia PQT eſt quadrupla ad circumferentiam PQ, ideo eſt ſubtenſa PQ ad ſubtenſam PT ſicut cubus ex PX ad cubum octuplum ex QX, minus ſolido quadruplo ſub QX & quadrato ex PO, vel ſicut cubus ex PO ad cubum ex QX minus ſolido duplo ſub QX & quadrato ex PO per ea quæ expoſita ſunt in Analyticis angularium ſectionum. Propoſitâ autem quauis ſerie quatuor continue proportionalium cubus compoſitæ è mediis æquat ſolidum ſub compoſitâ ex extremis & rectangulo quod ſub iiſdem fit vel mediis, plùs triplo ſolido ſub eadem compoſita è mediis & prædicto rectangulo, Itaque cũ MN id eſt QX componatur ex duabus mediis continue proportionalibus inter EF, FG ſub quibus quod fit rectangulum ęquale eſt quadrato ex HF id eſt duplo quadrato ex BC, ſextuplum autem quadratum ex BC valet duplum quadratum ex AC, Cubus ex QX multatus ſolido duplo ſub QX & quadrato ex PO id eſt AC æquat ſolidum ſub duplo quadrato ex BC & compoſita ex GF FG, id eſt triplâ AC. Quare PQ ad PT eſt ſicut cubus ex AC ad ſolidum ſub duplo quadrato ex AC, & triplâ AC & poſtremis binis analogiæ terminis ad AC adplicatis, eſt PC ad PT ſicut AC quadratum ad Sextuplum quadratum ex BC id eſt ad duplum ex AC atque adeo vt vnum ad duo. In circulo igitur ſub O centro deſcripto ſumptæ ſunt duæ circumferentiæ PQ PT, quarum hac ad illam eſt quadrupla ſicut etiam quadratum ſubtenſæ PT ad quadratum ſubtenſæ PQ. Quod erat faciendum.



PROPOSITIO VI.

Ex circumferentiis duorum circulorum exiſtentium in ratione quadruplâ lunulam deſcribere cui rectilineum exhibeatur æquale.

Exponatur circulus quilibet ſub O centro deſcriptus in quo ſumatur circumferentia PT cui quæ ſubtenditur ad ſubtenſam eiuſdem circumferentiæ quadranti ſit quadraticâ poteſtate vt quatuor ad vnum. Deinde per puncta PT interuallo VP vel VT æquante diametrum circuli iam deſcripti deſcribatur circulus alter ſub V centro. Secetur autem circumferentia PT quadrifariam in punctis QRST & ſubtendantur quadrantes illi PQ, QR, RS, ST, ac denique PT, Dico factum eſſe quod oportuit. Deſcriptam enim eſſe Lunulam QPZT conflatam ex circumferentiis PQT PZT ad duos circulos in ratione quadrupla exiſtentes pertinentibus, ita vt ei rectilineum exhibeatur æquale. pſi namque Lunulæ RPZT æquale eſſe rectilineum quinque laterum PQRST. Quoniam enim circulo PQT inſcripta PT ad inſcriptam PQ eſt quadraticâ poteſtate vt quatuor ad vnum & conſequenter longitudine vt duo ad vnum. Qua in ratione conſtituta eſt ſemidiameter circuli PZT ad ſemidiametrum circuli PQT. Igitur circulus PZT ad circulum PQT quadruplâ habet rationem. Et ſegmentum ZPT ſimile fit ſegmento PQT, valetque quadruplum ſegmenti PQT, atque adeo ipſa ſegmenta quatuor inter ſe æqualia PQ QR RS ST. A Lunulâ igitur QPZT auferantur ſegmenta PQ QR RS ST. Addatur vero ſegmenta ZPT. Tantumdem ergo Lunulæ QPZT ſuplet ſegmentum ZPT quantum eidem Lunulæ adimunt ſegmenta PQ QR RS ST.



Rectilineum itaque quinque laterum PQRST Lunulæ QPZT à circumferentiis duorum circulorum exiſtentium in ratione quadrupla deſcriptæ effectum eſt æquale ſicut oportebat.

De Miſtilineis ſiue angulis ſiue figuris. CAPVT XII.

QVæ de Miſtilineis ſiue angulis ſiue figuris hactenus occurrerunt τεχνικώτερα fere ſunt hæc.

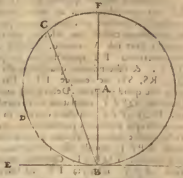
PROPOSITIO I.

Circumferentia ſub quâ & baſe comprehenditur ſegmentum circuli dupla eſt amplitudo anguli ſectionis continuati angulo corniculari.

Angulus qui fit à linea recta circulum tangente & ipſa circumferentia ſolet ab interpretibus dici κερατοειδὴς ſiue cornicularis.

Circuli igitur ſub A centro deſcripti ſit ſegmentum quodcumque BDC comprehenſumà rectâ BC quæ baſis eſt ſegmenti,& circumferentiâ BDC. tangat autem

circulum recta BE. Dico circumferentiam BDC duplam eſſe amplitudinem anguli EBC compoſiti ex ſectionis angulo DBC & corniculari DBE. Agatur enim diameter BAF. angulus igitur rectus eſt EBF. recti autem anguli amplitudo dupla eſt ſemicircumferentia circuli. Itaque dupla amplitudo anguli EBF eſt circumferentia BDCF. à quo auferatur CF dupla amplitudo anguli CBF. reſidua igitur CDB dupla eſt amplitudo anguli EBC. Quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO II.

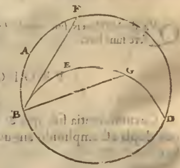
Curuum quo differunt in eodem circulo anguli diſſimilium ſectionum eiuſdem circuli circumferentia eſt.

Anguli enim propoſitarum diſſimilium ſectionum circuli ſunto D, B, illa maior hæc minor, angulus vero cornicularis F. Eſt igitur ex antecedente propoſitione F plus D circumferentia, & rurſus F plus B circumferentia, & harum differentia eſt D minus B, & vero differentia duarum circumferentiarum circumferentia eſt. Quare differentia angulorum D, B, circumferentia eſt. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO III.

Angulo dato quem faciunt duæ circumferentiæ duorum ſeſe ſecantium æqualium circulorum vna conuexâ altera concauâ angulum rectilineum exhibere æqualem.

Duo circuli ABCD BED æquali interuallo deſcripti ſeſe mutuo interſecent in punctis B, D. vnde fiat lunula ABED. Oportet angulo ABED lunari angulum rectilineum exhibere æqualem. Circulum BED tangat in B recta BF ſecans circulum ABCD tum in B tum in F. circumferentiæ autem BF ſumatur in circulo ſecundo BED circumferentia BG æqualis & ſubtendatur BG. Quoniam igitur æquales ſunt ſectiones ABF EBG quantum ab angulo lunari ABD aufert angulus ſectionis ABF tantum reſtituit angulus ſectionis EBG. Angulo itaque ABED lunari exhibitus eſt æqualis angulus rectilineus FBG. Quod erat faciendum.



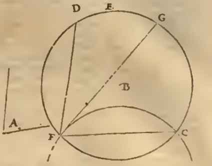
PROPOSITIO IIII.

A duobus æqualibus circulis lunulam deſcribere cuius angulus dato angulo exiſtat æqualis.

Sit

Sit datus angulus A. Oportet deſcribere lunulam, cuius angulus dato A angulo exiſtat æqualis.

In circulo ſub B centro deſcripto ſumatur circumferentia CED æqualis amplitudini duplæ anguli A dati & reſidua DFC ſecetur bifariam in F & per puncta FC ducatur circulus deſcripto iam circulo æqualis. Dico factum eſſe quod oportuit. Lunulam enim eſſe deſcriptam cuius angulus EFC ſit dato A angulo æqualis. Recta enim FG tangat circulum ſecundum in F ſecans primum tum in F tum in G & ſubtendatur FC. Circumferentia igitur FC ſeu FD circumferentiæ GC eſt æqualis vtrauis enim definit amplitudinem duplá anguli tectilinei GFC. Quare circumferentia GDF eſt circumferentiæ CED æqualis. Ipſa autem GEF eſt amplitudo dupla anguli ſectionis EFG continuati angulo corniculari eiuſdem circuli vel æqualis. Angulus vero ſectionis EFG continuatus angulo corniculari GFC eſt ipſe angulus lunaris. Lunaris igitur anguli EFC amplitudo dupla æqualis eſt circumferentiæ GDF id eſt CED, ſimpla dimidiæ CED id eſt angulo A dato.



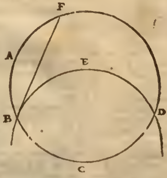
Itaque factum eſt quod oportuit.

PROPOSITIO V.

Anguli lunulæ à duobus circulis æqualibus deſcriptæ definire amplitudinem.

Duo æquales circuli vnus ABCD alter BED deſcribant lunulam ABED. Oportet anguli lunaris ABED definire amplitudinem.

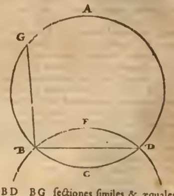
Circulum BED tangat recta in B ſecans primum circulum tum in B tum in F. Dico circumferentiam FAB æqualem eſſe duplæ amplitudini anguli lunaris BED. Angulus enim lunaris componitur angulo ſectionis ABF & angulo corniculari FBED, qui quidem angulus cornicularis FBED æqualis eſt angulo corniculari quem efficeret tangens ipſum circulum ABCD cum ſint circuli ABCD BED æquales. Sed anguli ſectionis FBA continuati angulo corniculari eiuſdem circuli BCD ſeu ei æqualis BED duplæ amplitudini æqualis eſt circumferentia FAB. Eadem igitur æqualis quoque eſt duplæ amplitudini anguli lunaris ABD. Secta autem eſto FAB circumferentia in A. Anguli igitur lunaris ABED definita eſt amplitudo videlicet circumferentia BA. Quod faciendum erat.



PROPOSITIO VI.

Triangula miſtilinea lunulis quas æquales circuli deſcribunt exhibere æqualia.

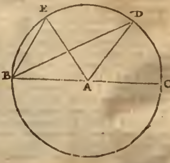
Duo æquales circnli vnus ABCD alter BED deſcribant lunulam ABED. Oportet lunulæ ABED exhibere triangulum miſtilineum æquale. Subtendatur BD erunt igitur circumferentiæ BED BCD æquales. ſeſt autem BD minor diametro, ſi enim eſſet communis diameter duorum æqualium circulorum concurrerent illi non etiam lunulam deſcriberent. Quare ſecatur circulus quiliber inæqualiter. Sit autem ſuperior circulus ABCD à quo dempta lunula relinquatur figura κερατοειδής EBCD. Eſt igitur circumferentia DAB maior circumferentiâ BCD ſeu BED. Quare ab circumferentia BAD auferatur circumferentia BG circumferentiæ BCD ſeu BED æqualis & manifeſtum eſt triangulum miſtilineum GBD crura habens æqualia BG BD, ipſaſque rectas lineas, baſim vero GD circumferentiam lunulæ ABED eſſe æquale. Tantum enim detrahit lunulæ ſectio BG quantum eidem addir ſectio BD cum ſint BD BG ſectiones ſimiles & æquales. Itaque factum eſt quod oportuit.



PROPOSITIO VII.

Si ab vnaquaque extremitatum diametri ſumantur in eandem partem circuli duæ circumferentiæ æquales, ab alterâ autem earundem extremitatum inſcribantur lineæ rectæ ad terminos ſumptarum æqualium circumferentiarum, Spatium circuli quod interiacet inter diametrum & proximam inſcriptam, adiunctum ſectioni circuli, quam facit altera inſcriptarum, æquale eſt duobus ſectoribus qui ſub æqualibus ſumptis circumferentiis comprehenduntur.

Sit circulus ſub A centro dimetiente quacumque BC deſcriptus, & in eandem partem circuli à dimetiente BC bifariam ſecti ſumantur circumferentiæ CD BE æquales, & ſubtendantur BD, BE agantur quoque ſemidiametri AD AE. Dico ſpacium comprehenſum à rectis BD BC, & circumferentiâ DC æquari ſectoribus BAE CAD. Triangula enim rectilinea BAE DAC æqualium ſunt laterum & angulorum. Quoniam autem in angulo rectilineo BDC recta DA ſecat bifariam baſim BC, ideo ſecat quoque bifariam ipſum triangulum BDC. Quare triangulum BAD æquale eſt triangulo DAC ſeu BAE. Spacium itaque miſtilineum illud DBC æquale eſt ſectori DAC & triangulo BAE. Vtrobique addatur ſectio BE. Spacium igitur miſtilineum illud DBC additum ſectioni BE æquale eſt ſectoribus BAE CAD. Quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO VIII.

Si ab vnaquaque extremitatum diametri ſumantur in eandem par-

tem circuli circumferentiæ æquales ab altera autem earundem extremitatum inſcribantur lineæ rectæ ad terminos ſumptarum æqualium circumferentiarum ſpacium circuli quod inter rectas inſcriptas interiacet æquale eſt ſectori ab eadem circumferentia qua ſpacium ipſum comprehenſo.

Repetatur antecedens diagramma. Dico ſpa-cium circuli EBC comprehenſum à rectis EB, BD, & circumferentia ED eſſe æquale ſectori EAD. A ſemicirculo enim BEC auferatur ſpacium BDC comprehenſum à rectis BD BC & circumferentia DC ipſa etiam dematur ſectio BE ſupereſt itaque ſpacium EBD comprehenſum à rectis EB BD & circumferentia ED. Ab eodem autem ſemicirculo auferantur ſectores CAD BAE quiquidem prædicto miſtilineo BDC ſpacio vna cum ſectione BE ſunt æquales. Supereſt igitur ſector EAD. Ergo ſectori EAD æquale eſt ſpacium EBD comprehenſum à rectis EB BD & circumferentia ED. Quod erat oſtendendum.

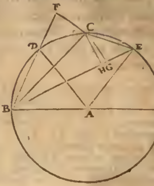
PROPOSITIO IX.

Cum ab eodem puncto circumferentiæ inſcribuntur circulo tres lineæ rectæ, quarum media latus eſt tetragoni ſecans bifariam angulum ab inſcriptis extremis factũ. Itaque deſcripta ſunt duo triangularia ſpacia quorum baſes ſunt circumferentiæ & æquales, latus autem niſcripti tetragoni crus vtrique commune. Dimidiam differentiam duorum illorum ſpaciorum triangularium figuræ tum miſtilineæ tum rectilineæ adæquare.

Sub A centro interuallo quocumque AB deſcribatur circulus, in quo ſumatur BC circumferentia tetragoni, & à puncto C ſumantur vtrinque circumferentiæ æquales CD CE circumferentiæ tetragoni minores, & ſubtendantur BD. BE. Sunt itaque deſcripta duo ſpacia triangularia DBC CBE, quorum baſes DC CE ſunt circumferentiæ & æquales. latus autem tetragoni BC crus eſt eis triangulis miſtilineis commune. itaque oportet dimidiam differentiam duorum illorum ſpaciorum triangularium figuræ tum miſtilineæ tum rectilineæ adæquare. Sub centro B interuallo BC deſcribatur circulus cuius circumferentiam abſcindant BD, BE in F, G. Dico in primis differentiam dimidiam inter ſpacium DBC & ſpacium CBE æquari triangulo miſtilineo CGE ſeu CDF. Deſcriptus enim circulus ſub B centro interuallo DC duplus fit ad circulum ſub A centro interuallo AB deſcriptum. Itaque ſecto FBG ad illum pertinens circulum æqualis eſt ſectori DAE ad hunc pertinenti, qui quidem ſector DAE æqualis oſtenſus eſt ſpacio miſtilineo DBE. Spacio igitur illi DBE tantumdem detrahit triangulum miſtilineum GCE quantum addit CFD, & ſunt æqualia illa triangula miſtilinea GCE, CFD. Eſt autem, FBC ſector dimidius totius ſectoris FBG id eſt ſpacij mixtilinei DBE inæqualiter ſecti à recta BC, & eſt DBC minus ſegmentum, CBE maius. Atque huic maiori ſegmento cum aufertur triangulum miſtilineum GCE remanet dimidium totius ſpacij ſicutcum illi minori adiicitur triangulum CFD triangulo GCE æquale. Cum autem ſecatur magnitudo quæpiam dimidiæ differentia ſegmentorum adiuncta dimidiæ magnitudini facit maius ſegmentum, ablata minus. Dimidia igitur differentia inter ſpacium DBC & ſpacium CBE eſt triangulum miſtilineum GCE ſeu CFD. Quod primo loco fuit oſtendendum.

Secundo cadat in B perpendiculariter CH & ſubtendatur CE. Dico rectilineum ac rectangulum triangulum CHE æquari miſtilineo GCE. Quoniam enim circulus FCG eſt duplus circuli DCE, ideò cum ſecabuntur ſimiliter circuli illi, ſegmenta illius erunt ſegmentorum huius. Itaque totum ſegmentum CF

quod deſcribitur in minore duorum illorum circulorum æquale eſt dimidio ſimili ſegmento deſcripto in maiore, nempe ſpacio HCG, cum dupla circumferentia CG ſimilis ſit circumferentiæ CE. Quantum igitur triangulo mixtilineo GCE detrahit ſegmentum CE, tantumdem reſtituit dimidium ſimile ſegmentum HCG, atque adeo rectilineum triangulum CHE æquale fit mixtilineo GCE. Quod ſecundo loco fuit oſtendendum. Sic igitur dimidia differentia inter ſpacium DBC & ſpacium CBE adæquata eſt tum figuræ mixtilineæ nempe DCF ſeu GCE tum rectilineæ HCE, vt erat faciendum.



Angulus cornicularis CAPVT XIII.

CAEpit agitari quæſtio à ſagacibus quibuſdam Geometris an diuerticulum quod facit circulus à lineâ rectâ vel circulari quæ ipſum tangit ſit angulus necne. Circulus enim cenſetur figura plana infinitorum laterum & angulorum linea autem recta rectam contingens quantulæcumque ſit longitudinis coincidit in eandem lineam rectam nec angulum facit. Itaque cum propoſuit Euclides inter lineam rectâ quæ circulum tangit & ipſam circumferentiâ non cadere alterâ lineam rectam εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας οὐ inquit ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται non etiam γωνίαν περιεχομένην ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας οὐ τέμνει ἑτέρα εὐθεῖα. Sic Apollonius Pergæus cum idipſum quod in circulo Euclides ineſſe in coni ſectione demonſtrauit vſus eſt voce τόπου non γωνίας nec inde elicuit Poriſma quale in propoſitione Euclidis legitur de angulo ſemicirculi his verbis καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶ, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. Ita vt non temere quis ſuſpicetur ea eſſe adulterina ne ſibi non ſatis conſtet Euclides, & alioqui Geometrica multa corruant fundamenta.

1. Anguli ex ipſa Euclidis partitione recti ſunt aut obliqui. Obliqui vero aut ſunt acuti vel obtuſi. Cum itaque angulus ſemicirculi non ſit obtuſus neque acutus videtur eſſe rectus, is vero qui exiſtimatur reliquus è recto & κερατοειδὴς ſolet vocari angulus imaginarius γωνία εἰκονική.

2 Angulos circumferentia definit. Nulla circumferentia definit diuerticulum κερατοειδὲς. Diuerticulum igitur illud non eſt angulus.

3 Secto diſſimiliter circulo anguli ſectionum diſſimilium differunt per circumferentiam quæ autem magnitudo metitur totam & ablatam eadem metitur & reliquam Propoſitis igitur ſectionibus diſſimilibus metiatur magnitudo quæpiam angulum maioris, metitur angulum minoris. Differentiam igitur maioris & minoris metietur id eſt circumferentiam. Ergo anguli ſectionum circumferentiæ ſunt & cum iidem non ſint maiores neque minores dimidio circumferentiæ ſub qua & baſe comprehenduntur ſectiones, & dimidio cenſendi ſunt æquales.

4 An circulus quænam figura plana eſt anomala? an non Ariſtoteli prima figura figu-

figura planarum eſt & perfectiſſima vt ſphæra ſolidarũ. Regulare autem eſt in planis figuris vt ſimilitudo earum æqualitatem angulorum arguat & æqualitas ſimilitudinẽ. Itaque in circulis inæqualibus anguli ſimilium ſectionum videntur æquales. Si angulus ſemicirculi in maiore circulo idem eſt qui in minore angulus κερατοειδὴς angulo κερατοειδοῦ non exhibetur minor. Cum itaque decrementum non ſuſcipiat magnitudo non eſt, neque enim datur magnitudo ἐλαχίστη aliter quam intellectu.

5 Anguli κερατοειδοῦς ſiquidem is incrementum ſuſcipit duplus eſt angulus qui fit in contactu duorum æqualium circulorum cur eiuſdem non dabitur triplus, quadruplus aliterue multiplus?

6 Circulus circulum æqualem in lunari ſpacio poteſt ſecare ad angulum rectum an angulus exterior qui fit ex concauis circumferentiis deficiet à recto per angulum contingentiæ ipſorum circulorum.

In ſphæra maximus circulus maximum circulum per polos ductum ad angulos ductos vtrinque ſecat. Qualis autem eſt circulus in planis talis eſt ſphæra in ſolidis inquit Ariſtoteles.

Obtinuit tamen Procli & aliorum interpretum ſententia adſerentium angulum κερατοειδῆ angulum eſſe ipſumque minorem quouis acuto. Lineæ enim circulari à ſuo ortu ineſſe curuaturam. Itaque tranſiri per maius & minus & non tranſiri per æquale, cum immota baſe trianguli rectanguli circumducetur hypotenuſa donec coincidat cum baſe.

Æqualitas lineæ rectæ & circumferentiæ ſecundum Archimedem comprobata. CAPVT XIIII.

TRadit Eutocius à nemine vnquam dubitatum fuiſſe εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου. Æqualitatem autem illam ita demonſtrauit Archimedes.

PROPOSITIO I.

Datis duabus inæqualibus lineis vna recta altera circulari inuenire lineam rectam minorem maiore datarum & maiorem minore.

Exceſſus enim datarum linearum rectæ & circularis eſto Z. Recta vero ipſa G. Aut igitur recta G maior eſt circulari, aut minor. Sit primum maior. Oportet igitur inuenire lineam rectam, quæ ſit minor quam G, ſed maior quam G minùs Z.

Sumatur quæcumque longitudo maior ipſa G, & ſit H, & fiat vt H ad G ita H minùs Z ad A. Dico imprimis longitudinem A eſſe minorem quam G. Quoniam enim ex hypotheſi eſt vt H ad G ita H minùs Z ad A, ideò ſubducendo erit vt H ad G, ita Z ad G minùs A. Cum igitur A poſſit ex G auferri, eſt A minor quam G. Secundo dico A eſſe maiorem quam G minus Z. Quoniam enim H eſt maior quam G ideo erit vt H ad G ita Z ad minorem quam Z, veluti ad F, & ſubducendo erit vt H ad G ita H minus Z ad G minus F. Itaque G minus F æquabitur A. Eſt autem G minùs F maior quam G minùs Z. Ab eadem enim G longitudine minor illic quam hic aufertur longitudo. Quare A eſt maior quàm G minùs Z.

Propoſitis itaque duabus lineis vna recta nempe G altera circulari eaque minore nempe G minus Z inuenta eſt A linea recta minor quam G ſed maior quam G minus Z. Quod erat faciendum in prima πτώσει.

Sed eſto G recta minor circulari. Oportet igitur inuenire lineam rectam quæ ſit maior quam G ſed minor quam G plus Z. Sumatur rurſus quæcumque longitudo maior

quam G, & ſit H & ſiat vt H ad G, ita H plus Z ad E. Dico imprimis longitudinem E maiorem eſſe quam G. Quoniam enim eſt vt H ad G ita H plus Z ad E. Ideo ſubducendo erit vt H ad G, ita Z ad E minùs G. Cum igitur G auferatur ex E, præſtat. E ipſi G. Secundo dico E eſſe minorem quam G plùs Z. Quoniam enim H eſt maior quam G, ideò eſt vt H ad G ita Z ad minorem quam Z, veluti ad F. Et per additionem vt H ad G, ita H plus Z ad G plus F. Itaque G plus F æquabitur E. Eſt autem G plus F minor quam G plus Z. Eidem enim longitudini G minor illic quam hic additur longitudo, Quare E minor eſt quam G plus Z.

Propoſitis itaque duabus lineis, vnâ rectâ nempe G, alterâ circulari eâque maiore nempe G plus Z inuenta eſt E linea recta maior quam G ſed minor quam G plus Z. Quod erat faciendum in ſecunda πτώσει. Atque adeo conſtat problema.

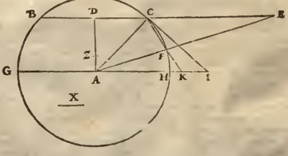
Scholivm.

Eadem argumentatione propoſitis duobus angulis vno rectilineo, altero miſtilineo poterit inueniri rectilineus minor dato rectilineo, ſed maior dato miſtilineo. Quod tamen negabunt Euclidei, neque enim dabitur angulus rectilineus minor recto rectilineo idemque maior angulo ſemicirculi.

Propositio II.

Circulo dato & lineâ rectâ in eo inſcriptâ, quæ diametro minor exiſtat, ipsâque extra circulum continuatâ, educere lineam è centro ita ſecantem circulum & continuatam inſcriptam, vt pars eductæ è centro interiacens inter circumferentiam & inſcriptam ſe habeat ad iungentem inſcriptæ & eductæ terminos in circumferentiâ notatos viciniores, ſicut dimidia inſcripta ad minorem eâ quæ ex centro inſcriptam illam bifariam ſecat.

Sit datus ſub A centro deſcriptus circulus, cui inſcripta ſit BC minor diametro ſectâ bifariam ab eâ quæ ex centro in D. Eadem BC producta eſto extra circulum. Dico poſſe educi talem AFE ſecantem BC productam in E, circumferentiam vero in F, vt FE ad CF ſe habeat vt DC ad quamcumque minorem ipſâ AD vt pote DZ. Ipſi enim BC agatur diameter parallela GAH quã tangens circulum in C ſecet in I. Sunt igitur ſimilia triangula ADC AIC.

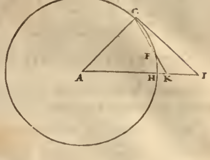


Quare DC ad AD eſt ſicut AC ad CI. DC vero ad DZ eſt ſicut AC minorem quam CI. Sit illa X. Poteſt igitur à puncto C educi recta ſecans circumferentiam in F parallelam vero GI in K, ita vt FK ſit æqualis ipſi X cum ſit X minor quam CI. Educatur igitur & iungatur AF & continuetur ad BC in E. Ergo eſt vt DC ad DZ ſic AF ad FK. Sed cum ſint parallelæ BE GI

ſimilia triangula ſunt AKF GFE. Quàre eſt vt AF ad FK. Ita FE ad CF. Eſt igitur FE ad CF ſicut CD ad DZ. Et conſtat propoſitum.

SCHOLIVM.

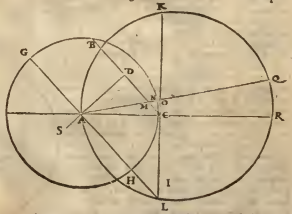
Quod ſumit lemma Archimedes poſſe à puncto C educi rectam quæ ſecat circumferentiam in F rectam vero AI in K ita vt FK ſit æqualis cuicumque rectæ X modo ea ſit minor quam CI verum eſt κατ' αἴσθησιν. Neque enim tam proxima recta ipſi CI deſignabitur X quin educetur FK ipſi æqualis, & tamen different CK FK. Secabit enim CK circulum in F cum ſit CK alia à tangente CI & minor ipſa CI, maior vero recta CH. Sectio autem contingit in duobus punctis. Vnde linea erit inſcripta CF. Itaque κατὰ φύσιν verum eſt aliquam eſſe lineam quæ erit minor ipſa CI & maior ipſa FK nempe ipſam CK cum imaginabimur CK omnium poſt CI maximam.



PROPOSITIO III.

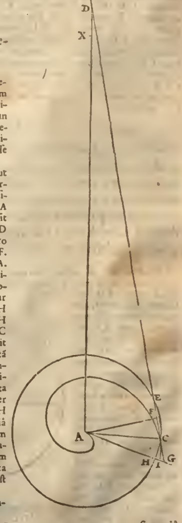
Circulo dato & lineâ rectâ in eo inſcriptâ, quæ diametro minor exiſtat, & aliâ inſuper quæ circulum tangat in inſcriptæ termino, educere lineam è centro ita ſecantem circulum & ipſam tangentem vt pars eductæ è centro interiacens inter circumferentiam & inſcriptam ſe habeat ad partem tangentis quæ eſt inter contactum & ipſam eductam, ſicut dimidia inſcripta ad maiorem eâ quæ ex centro inſcriptam illam bifariam ſecat.

Sit datus ſub A centro deſcriptus circulus, cui inſcripta ſit BC minor diametro, ſecta bifariam ab eâ quæ ex centro in D. Sed & tangat circulum recta LC. Dico poſſe educi talem AMNO ſecantē BC in M, circumferentiā in N, tangentem verò LC in O, vt MN ad OC ſe habeat vt DC ad quamcumque maiorem ipſa DA, vtpote DS Ipſi enim BC agatur diameter paralella GAH quam tangens LC ſecet in I. Sunt igitur ſimilia triangula ADC AIC. Quare DC ad AD eſt ſicut AC ad CI. DC vero ad DS eſt ſicut AC ad maiorem quàm CI. Sit illa CK & per tria puncta KAI deſcribatur circulus ad cuius circumferentiam producatur AC in R & eidem circulo inſcribatur AMNOQ ita vt OQ ſit ipſi CR æqualis. (Id enim



fieri poteſt) quoniam CK conſtructa eſt maior quam CI. Dico eſſe MN ad OC ſicut AC ad CK, ſeu DC ad DS. Eſt enim OA ad MA ſicut OI ad CI cum ſint BC GI parallelæ. Itaque quod fit ſub OA CI æquale eſt ei quod fit ſub MA OI. Sed & quod fit ſub KO OI æquale eſt ei quod fit ſub AO OQ. Eſt autem id quod fit ſub KO OI ad id quod fit ſub AM OI, ſicut KO ad AM. Et vt id quod fit ſub AO OQ ad id quod fit ſub AO CI, ſicut OQ id eſt CR, ad CI. Quare eſt KO ad AM ſicut CR ad CI. Sed CR ad CI eſt ſicut CK ad CA. Quare eſt KO ad AM, ſicut CK ad CA. Et conuertendo eſt AM ad KO ſicut CA ad CK. & ſubducendo eſt CA minùs AM ad CK minus OC, ſeu aliter eſt MN ad OC ſicut AC ad CK, id eſt ſicut DC ad DS. Et conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IIII.



Inuenire lineam rectam circumferentiæ dati circuli æqualem.

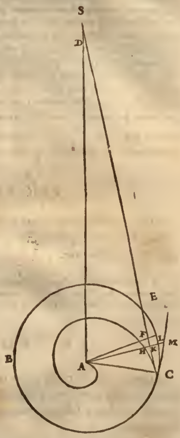
Sit datus circulus cuius A centrum, diameter BAC. Oportet facere quod propoſitum eſt. Deſcribatur helix cuius principium A, principium vero conuerſionis AC. Cadat autem in AC perpendiculariter recta DA, quam alia recta tangens helicem ad C intercipiat in D. Dico DA toti circumferentiæ dati circuli BC eſſe æqualem.

Si enim non ſit æqualis, erit igitur maior aut minor. Primum ſi fieri poſſit eſto DA maior circumferentiâ dati circuli BC. Itáque ex propoſitione primâ ſumatur recta minor quidem ipſâ DA ſed maior ipſâ circumferentiâ circuli BC, & ſit illa XA. Helicem autem tangens recta CD intercipiat circumferentiam in E. Et è centro acta AF ſecet inſcriptam EC bifariam in F. Eſt igitur ſicut CA ad AD ita CF ad FA. Sed ſicut CA ad XA ita erit CF ad minorem quam AF, vt pote FZ. Itaque ex propoſitione ſecunda continuetur EC, & educatur AHG ita ſecans circumferentiam quidem in H continuatam verò EC in G, vt HG ad CH ſe habeat ſicut CF ad FZ, hoc eſt ſicut AC ad AX. Conuerſim igitur & permutatim erit AC ſeu AH ad HG ſicut, AX ad rectâ CH. Hoc autem eſt abſurdum. Ipſa enim AG intercipiat helicem in I. Ex proprietate igitur helicis, eſt AH ad HI ſicut circumferentia tota circuli ad circumferentiam CH, & conſequenter cùm tota circumferentia cedat rectæ AX, erit AH ad HI ſicut AX ad maiorem circumferentiâ CH, & cum HG præſtet ipſi HI (tangit enim helicem recta CG non etiam ſecat) multò magis erit AH ad HG ſicut, AX ad maiorem longitudinem circumferentiâ CH, nedum recta CH, quæ minor eſt quam curua CH. Non eſt igitur DA maior circumferentiâ circuli.

Sed ſi fieri poſſit, eſto DA minor circum-

ferentiâ

ferentiâ dati circuli H B G. Itaque ex eâdem propoſitione primâ ſumatur recta minor quidem circumferentiâ circuli H B C, ſed maior ipſâ AD, & ſit AS. Erit igitur AS ad AC, ſicut CF ad maiorem quam FA, vt pote FR. Itaque tangat quæpiam recta circulum ad C. & ex propoſitione tertiâ educatur A K L M, ita ſecans E C in K circumferentiam in L, tangentem verò in M vt ſit K L ad M C, ſicut C F ad F R, hoc eſt, ſicut A C, ſeu A L ad A S. Conuerſim igitur & permutatim erit A L ad K L ſicut A S ad M S. Hoc autem eſt abſurdum. Ipſa enim A L M intercipiat helicem in N. Ex proprietate igitur helicis eſt A L ad N L ſicut circumferentia tota ad circumferentiam L C, & per conſequens, cùm tota circumferentia præſtet ipſi A S, erit A L ad N L ſicut A S ad minorem circumferentiâ L C. Et cum K L cedat ipſi N L (tangit enim helicem recta C K, non etiam ſecat) Erit A L ad K L ſicut A S ad minorem circumferentiâ L C, nedum rectâ M C, quæ ipſâ L C circumferentiâ eſt maior. Non eſt igitur D A minor circumferentiâ circuli. Itaque eſt eidem æqualis. Circumferentiæ igitur dati circuli D E C inuenta eſt recta D A æqualis. Quod faciendum erat.



SCHOLIVM.

Sic dixerit aliquis Angulo ſemicirculi æqualem eſſe rectum. Si enim non ſit æqualis, aut erit maior, aut minor. Sit primum maior, & ſumatur angulus rectilineus minor quidem recto ſed maior angulo ſemicirculi. Et ſtatim deprehendet id fieri non poſſe. eſſe enim adſumpto quoque rectilineo maiorem angulum ſemicirculi demonſtrabit. Sit autem minor, & ſumatur angulus rectilineus maior quidem recto ſed minor angulo ſemicirculi. Et ſtatim quoque deprehendet id fieri non poſſe. eſſe enim adſumpto quocumque obtuſo minorem angulum ſemicirculi demonſtrabit. Itaque concludet tandem ſecundum propoſitum aduerſus Euclidem, Euclideorumue ſententiam.

Geometrica κύκλου μέτρησις bene proxima vera.

CAPVT XV.

QVæ ſit analogia circumferentiæ circuli ad diametrum adhuc neſcitur. Neque enim inuentio lineæ rectæ circulo æqualis ſiue Archimedea ſiue Nicomedea eſt ἄτεχνος. Arguit itaque Archimedes Analogiam circumferentiæ circuli proximam veræ ex collatione polygonorum inſcriptorum circulo cum ſimilibus polygonis inſcriptis. Polygona inſcripta minora ſunt circulo, circumſcripta maiora. Area circuli media eſt inter aream polygoni inſcripti & polygoni ſimilis circumſcripti. Diameter autem ducta in perimetrum circuli facit aream ipſius quadruplam. Sic concluſit Archimedes circumferentiam minorem eſſe triplâ ſeſquiſeptima diametri, ſed maiorem tripla decupartiente ſeptuageſimas primas diametri, id eſt poſita diametro partium ſeptem circumferentiam minorem eſſe partibus viginti duabus. Sed poſitâ eadem diametro partium 71. circumferentiam maiorem eſſe partibus 223. Sed nos egreſſi longe fines Archimedeos, etſi ſua inſequuti veſtigia, poſitâ diametro particularum 100, 000 deprehendimus certô in Analyticis angularium ſectionum circumferentiam maiorem eſſe 314, 159 $\frac{26\ 535}{100.\ 000}$. Sed minorem 314, 159 $\frac{26\ 537}{100.\ 000}$. Itaque duo Theoremata inde elicuimus & totidem problemata ad mechanicem bene adcommoda qualia hic ſubiicimus.

PROPOSITIO I.

Si ſecetur linea recta per extremam & mediam rationem, Erit proximè vt minus ſegmentum ad totam, ita diameter circuli ad dextantem circumferentiæ.

Lineæ rectæ ſectæ ἄκρον καὶ μέσον λόγον minus ſegmentum ſit 100, 000. Tota ſit paulo maior 261, 803. Conſtituta autem diametro 100, 000 fit circumferentia tota 314 160. Vncia vero 26, 180 Dextans 261, 800. Quare bene proxima veræ eſt analogia.

PROPOSITIO II.

Si ſecetur linea recta per extremam & mediam rationem, Erit proxime vt tota continuata minore ſegmento ad totam duplam, ita quæ poteſt quadrato ſeſquialterum ſemidiametri ad latus quadrati circulo æqualis.

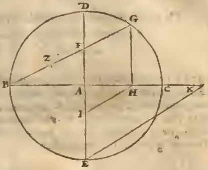
Linea recta ſecta ἄκρον καὶ μέσον λόγον ſit 100, 000. Minus ſegmentum ſit paulo minus 38 197. Conſtitutâ autem ſemidiametro circuli 100, 000, quæ poteſt quadrato ſeſquialterum ſemidiametri paulo maior eſt 122 474 & eſt vt 138, 197 ad 200 000 ita 122 474 ad 177 245 cuius quadratum eſt 31, 416, 000, 000 proxime. Tanta autem fere eſt area circuli ſemidiametrum habentis 100 000. Quare bene proxima veræ eſt Analogia.

PROPOSITIO III.

Quadranti circumferentiæ dati circuli inuenire proxime lineam rectam æqualem.

Sit datus circulus ſub A centro deſcriptus BDCE. Oportet quadranti circumferentiæ dati circuli BDCE inuenire lineam rectam proxime æqualem.

Datus BDCE circulus ſecetur quadrifariam à duabus diametris BC DE ſeſe perpendiculariter interſecantibus in A, ipſaque DA ſecetur bifariam in F, & per punctum F inſcribatur BG, & in BC cadat perpendicularis GH, Abs. BF autem auferatur ZF ipſi FA æqualis, vnde fit BZ latus decagoni, cui ponatur in EA ſemidiametro æqualis EI, & fiat vt AI ad AE ita AH ad AK, iunctâ videlicet HI, & actâ EK ipſi HI parallelâ. Dico rectam AK eſſe æqualem circumferentiæ DGC. Quoniam enim IE poſita eſt æqualis ipſi BZ, ideo ſecatur AE per mediam & extremam rationem in I, & eſt AI minus ſegmentum, AE maius. Itaque ex propoſitione primâ ſicut eſt AI ad AE, ita erit diameter ad dextantem circumferentiæ, ita ſemidiameter ad quincuncem, & ita dimidia ſemidiameter ad duas vncias cum ſemiſſe, ac denique ita dimidia ſemidiameter aucta quintâ parte ad tres vncias quadrantemue circumferentiæ. At vero AH eſt dimidia ſemidiameter aucta quintâ parte, eſt enim vt BA ad AF ita BG ad GC ſiue longitudine ſiue poteſtate. Sed quadratum ex BG ad quadratum ex GC eſt vt BH ad HC. Ergo quadratum ex BA ad quadratum ex AF eſt vt BH ad BC. Et per ſyneresim eſt quadratum ex BF ad quadratum ex BA vt BC ad BH.



Qualium autem BA 10 talium FA 5 BF 125 BG 20. Et quoniam eſt vt 125 ad 100 ita 20 ad 16 talium etiam BH eſt 16 atque ideo AH 6. Eſt igitur AH æqualis dimidiæ BA auctæ quinta parte. Quare cum ſit vt AI ad AE ita AH ad AK erit AK æqualis quadranti circumferentiæ circuli. Quadranti igitur circumferentiæ dati circuli inuenta eſt recta AK proxime æqualis. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO IIII.

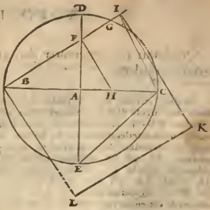
Inuenire quadratum circulo proxime æquale.

Sub A centro deſcribatur circulus ſectus quadrifariam à duabus diametris BC DE ſeſe perpendiculariter interſecantibus in A, & in AD ponatur AF æqualis dimidiæ CE, & per F inſcribatur BG. Secetur autem AC per extremam & mediam rationem in H, & ſit AH minus ſegmentum, HC maius. Et fiat vt BH ad BF ita BC ad CI, iunctâ videlicet FH, & actâ CI ipſi HF parallelâ. Dico BI eſſe latus quadrati circulo BEC proximè æqualis.

Eſt enim BH ad BC ſicut tota continuata minore ſegmento ad totam duplam. Itaque vt BH ad BC ſic quæ poteſt quadrato ſeſquialterum ſemidiametri ad latus

quadrati circulo æqualis proxime. Sed BF poteſt quadrato ſeſquialterum ſemidiametri. Poſita eſt enim FA æqualis dimidiæ CE. Itaque quadratum ex FA eſt dimidium quadrati ex BA. Quoniam igitur eſt vt BH ad BC ita BF ad BI, erit BI latus quadrati circulo DBEC æqualis proxime. Deſcribatur itaque ipſum quadratum BIKL.

Inuentum eſt igitur BIKL quadratum circulo BDCE proximè æquale. Quod erat faciendum.



De alterâ methodo quadrandi circulum per angulum angulo, qui fit à tangente helicem, & Diametro circuli, propemodum æqualem. CAPVT XVI.

ETſi non deſcribantur volutæ, neque tangantur κατ' ἐπιστημονικὸν λόγον, attamen quanti ſint anguli in volutarũ contactu quantæue rectæ, quæ iis angulis ſubtendũtur, ratiocinamur ἐπιστημονικῶς, & μηχανικὴν iuuat τεχνικὴν, τεχνικὴν μηχανικὴν, vt hoc capite placet exemplificari, & quadrandi circulum tam proximè quam placuerit vero, ‸ bene paratam, neque δυσμήχανον exhibere, quâ haud ſcio an alia poſſit proponi generalior & artificioſior.

(marginal handwritten insertion: methodum)

PROPOSITIO I.

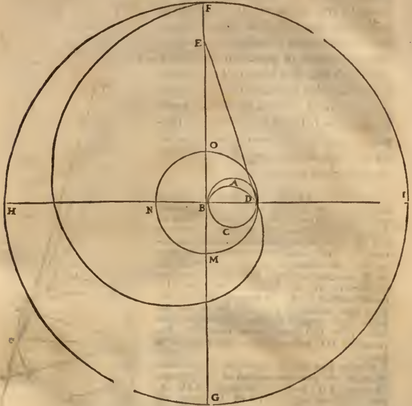
Si deſcribatur helix, cuius principium ſit in vna extremitate diametri alicuius circuli, quadrans vero principij conuerſionis ſit ipſa diameter, Seſe autem mutuo ſecent duæ lineæ rectæ. Vna circulum contingens in principio helicis. Altera contingens helicem in quadrante principij conuerſionis. Itaque duæ illæ lineæ rectæ vnà cum diametro circuli triangulum rectangulum deſcribant, cuius baſis ſit ipſa diameter. Erit altitudo trianguli ſemi perimetro dati circuli æqualis, ipſum vero triangulum circulo æquale.

Sit circulus ABCD, cuius diameter BD, & deſcribatur helix, cuius principium B quarta vero pars principij conuerſionis ſit BD. Seſe autem mutuo ſecent duæ lineæ rectæ in E. Vna circulum contingens in B altera contingens helicem in D. Itaque duæ illæ lineæ rectæ BE DE vnà cum diametro BD triangulum EBD rectangulum conſtituant, cuius baſis ſit BP. Dico altitudinem EB circumferentiæ BAD, id eſt ſemiperimetro dati circuli ABCD eſſe æqualem, atque adeo ipſum triangulum EBD dato circulo ABCD eſſe æquale.

Centro

Centro enim B, interuallo BF quadruplo ad BD, deſcribatur circulus FHGI quadriſectus à duabus diametris HBDI FEBG. Itaque BF ſit principium reuolutionis helicis, cuius continuetur in prima reuolutione deſcriptio. Sed & centro B interuallo BD deſcribatur circulus tertius DMNO.

Per ea igitur quæ demonſtrata ſunt ab Archimede XXI propoſitione περὶ ἑλικῶν recta BE quadranti totius circumferentiæ DMNO eſt æqualis. Quadrans autem

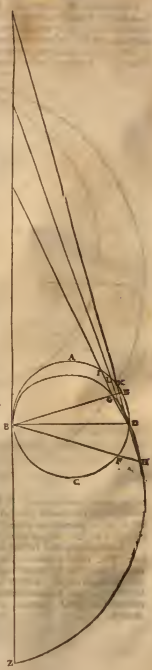


totius circumferentiæ circuli DMNO eſt æqualis ſemiperimetro circuli BAD. Perimetri enim circulorum ſunt, vt ipſorum diametri. Diameter verò circuli DMNO eſt dupla ad diametrum circuli ABCD. Itaque BC eſt æqualis ſemiperimetro circuli ABCD. Quod erat primo loco oſtendendum.

Triangulum porro rectangulum cuius altitudo eſt quadrupla ipſius BE, immutatâ baſe BE, eſſet æquale circulo DMNO, ex propoſitione primâ περὶ μετρήσεως κύκλου. Triangulum igitur rectangulum EBD erit æquale quadranti circuli DMNO. Sed quadranti circuli DMNO æqualis eſt circulus ABCD. Circuli enim ſimiles ſunt ijs, quæ à dimetientibus illorum deſcribuntur, quadratis. Triangulum igitur rectangulum EBD circulo ABCD eſt æquale. Quod erat ſecundo loco oſtendendum.

PROPOSITIO II.

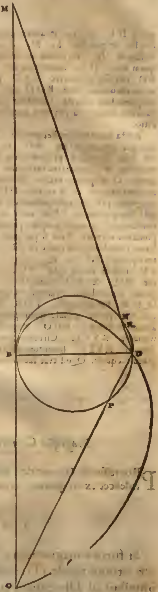
Si deſcribatur helix cuius principium ſit in vna extremitate diametri alicuius circuli, quadrans verò principij conuerſionis ſit ipſa diameter, incidant autem in helicem duæ rectæ quæ faciant angulos cum diametro æquales, & ab extremitate diametri ad punctum incidentiæ educantur duæ aliæ lineæ rectæ, à quibus qui fit angulus ſecetur bifariam à tertiâ quâpiam rectâ, Tertia illa in eâ anguli bipartitione helicem ferè continget, tantóque propiùs cum contingente concurret quò incidentium anguli cum diametro facti erunt acutiores.



Sit circulus ABCD, cuius diameter BD, & deſcribatur Helix BGHZ, cuius principium conuerſionis intelligatur recta contingens cıiculum ad B, quadr· pla ad ipſam BD diametrum. Itaque ſit BD quadrans principij conuetſionis. Sumantur autem DE DF circumferentiæ æquales, & agantur BE BF incidentes in helicem ad puncta G, H, & connectantur DG HD ſecantes circumferentiam in I, K. Ipſaque circumferentia IK ſecetur bifariam in L, & iungatur DL. In helicem igitur incidentes DG DF faciunt cum diametto BD angulos æquales. Angulum autem ab eductis DG HD ſecat bifariam tecta DL. Dico rectam DL helicem ferè contingere in ipſo D puncto.

Helicem enim verè contingat recta DM, intercipiens in M eam quæ circulum ad B contingit. Eſt igitur BM ſemiperimetro circuli ABC æqualis. Qualium itaque DB eſt 200 000, talium BM eſt 314, 159 ptoximè. Angulus igitur BDM fit partium LVII. XXX'I. VI". Ipſa autem DM circuli ABD circumferentiam intercipiat in N. Erit circumfetentia BN partium CXV. I'I. XII". Sed & helix contingentem BM intetcipiat primum in O. Itaque BO ſit ſemis principij conuerſionis, & iungatur DO ſecans circumferentiam in P. Quoniam BO dupla eſt BD, fit angulus BDO partium LXXIII. XX'V LIIII". Itaque circumferentia PB partium eſt CXXVI. L'I. XLVIII". Reſidua verò è tota perimetro ANDP fit partium CCXXXIII. VIII'I. XII". Et ſi reſidua illa ſecetur bifariam in R, fit BR ſeu RP partium CXVI. XXXIII'I. VI". excedens BN duntaxat per partem I. XXX'I. LIIII". etiamſi angulus ex incidente BO & dia-

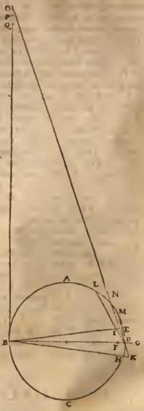
metro ſit rectus. Itaque ſit BO maxima incidentium in hypotheſi duarum quæ cum diametro faciant angulos æquales. Duæ autem illæ incidentes quæ in expoſita conſtructione ſumptæ ſunt BG BF faciant cum diametro angulos bene acutos. Sint ſanè DG DH peripheriæ ſingulæ partium IX, ad peripheriam decagoni ſubduplæ. Eſt IX ad CLXXX vt 1 ad 20. Qualium itaque BD eſt 20 talium incidens BG eſt 19, BH verò 21. Et anguli BGD DBH ſiunt ſinguli partium IIII cum ſemiſſe. In triangulo itaque GBD cum data ſit ratio crurum DG BD, vna cum angulo verticis DBG dabitur angulus GDB. Æque in triangulo BHD cum data ſit ratio crurum BH BD vna cum angulo verticis HBD, dabitur angulus BDH qui cum angulo BDK duorum rectorum eſt. Cum autem reſecabitur ab angulo KDB angulus GDB, remanebit angulus IKD, atque adeo dimidius angulus ILD ſeu LDK. Inſtituatur igitur calculus. Fit angulus GDB partium LIIII. XXXVI′I. XLV″. angulus BDH partium CXIX. XXXIII′I. LI″. angulus KDI partium L. XLVI′I. XXIII″. peripheria BL, CXV. I′I. LII″. beſſe duntaxat ſcrupuli maior circumferentiâ BR. DL igitur ferè concurrit cum DR, & tantò propius concurret quantò circumferentiæ DE DH adſumentur br uiores. Quò pertinet propoſitum.



Propositio III.

Inuenire Quadratum dato Circulo tam proximè quam placuerit æquale.

Sit datus circulus ABCD. Oportet dato ABCD circulo inuenire quadratum æquale. Sit dati circuli diameter BD, & abs ſemicirculo BD abſcindatur circumferentia DE, datam habens ad ſemiperimetrum DEB rationem. Sit data ratio vt vnum ad viginti, quanta erit ſi peripheria DE ſumpta ſit æqualis peripheriæ, quam abſumit latus Enneagoni circulo inſcripti, dimidiæ. Abſcindatur ab DB recta DF æqualis vigeſimæ parti ipſius DB. Eadem BD producatur in G, poſitâ DG æquali ipſi FD. Eſt igitur BD ad BF ſicut ſemiperimeter BED ad peripheriam BE, quam rationem obtinebit BD ſemidiameter ad rectam minorem ſubtenſâ BE. Abs BE igitur abſcindatur BI ipſi BF æqualis. BH verò producatur in K, ita vt BG BK ſint æquales. Et connectan-



tur D I K D ſecantes ſemicircumferentiam B A D in punctis L, M, & ſecetur L M bifariam in N. Circulum autem tangat recta in B, quam acta D N intercipiat in O. Dico rectam B O eſſe ſemiperimetro B A D proximè æqualem, atque adeo triangulum B O D dato circulo A B C D propemodum æquale. Excedere enim circulum tam pauxillâ differentiâ, vt eius exceſſus vix habenda ſit ratio.

Recta enim tangat helicem in D puncto, & intercipiat contingentem B O in P. Ex his igitur quæ ſuperiore propoſitione demonſtrata ſunt punctum P concurret ferè cum O puncto. Erit autem O aliquantò elatius, ſed ea differentia erit admodum exigua. Et ſi vtrauis D H D E foret quadrageſima pars aut octogeſima, aut pro arbitrio minutula ſemiperimetri, F D verò vel D G tantula ſemidiametri, tanto propius punctum P ad O punctum accedet. Sanè ſi per puncta I D K deſcribatur circulus, quem recta tangat in D puncto intercipiens B O in Q, erit B Q minor ipſâ B P nedum minor ipſâ B O, ita vt B P inter B Q & B O conſiſtat, vt numeris quoque poteſt demonſtrari. Triangulum igitur O D B ſeu Q D B fiet triangulo P D B hoc eſt areæ circuli tam prope æquale quam placuerit. Triangulo autem rectilineo B D O æquale quadratum conſtituatur R S T V. Circulo igitur A B C D quadratum R S T V inuentum eſt tam proximè quam placuit æquale. Quod erat faciendum.

Progreßio Geometrica. CAPVT XVII.

PRogreſſionis Geometricæ doctrina vno ferè abſoluitur Theoremate, diductis videlicet ex eo quatuor δεδομένοις.

THEOREMA.

Si fuerint magnitudines continuè proportionales, Erit vt terminus rationis maior ad terminum rationis minorem, ita compoſita ex omnibus ad differentiam compoſitæ ex omnibus & maximæ.

Sint magnitudines continuè proportionales, quarum maxima ſit D, minima X, & compoſita ex omnibus F, & ſit ratio maioris ad minorem ſicut D ad B. Dico eſſe vt D ad B. ita F minùs X ad F minùs D.

Δεδόμενον I.

Itaque datis D, B, X *dabitur* F. *Enimuerò* $\left\{\frac{D\ \text{quadratum} - B\ \text{in}\ X}{D - B}\right\}$ *æquabitur* F.

I I.

Contrà datis D, B, F, *dabitur* X. *Enimuerò* $\left\{\frac{B\ \text{in}\ F + D\ \text{quadrato} - D\ \text{in}\ F}{B}\right\}$ *æquabitur* X.

I I I.

Et datis D, F, X *dabitur* B. *Enimuerò* $\left\{\frac{D\ \text{in}\ F - D\ \text{quadrato}}{F - X}\right\}$ *æquabitur* B.

I I I I.

Et datis B, F, X *dabitur* D. *Enimuerò* $\left\{D\ \text{in}\ F - D\ \text{quadrato}\right\}$ *æquabitur* $\left\{B\ \text{in}\ F - B\ \text{in}\ X\right\}$.

Vt hæc in Analyticis abunde demonſtrata,& exemplificata ſunt.

An verò cum magnitudines ſunt continuè proportionales in infinitum, abibit X in nihilum. Et euaneſcere aſſerent Mechanici, cum minima quantitas ſubſit tantum intellectu.

Itaque erit ſecundum eos. Vt differentia terminorum rationis ad terminum rationis maiorem, ita maxima ad compoſitam ex omnibus. Cum alioquin eſſet, Vt differentia terminorum rationis ad terminum rationis minorem, ita minima ad crementum.

Et vt differentia terminorum rationis ad terminum rationis maiorem, ita maxima ad compoſitam ex omnibus plus cremento.

Sint magnitudines proportionales in continuâ ratione ſubquadruplâ εἰς ἄπειρον, *& ſit maxima omnium* 3. *Compoſita ex omnibus fiet* 4. *Neque enim magnitudinibus illis in continuâ ratione ſubquadruplâ exiſtentibus quarum maxima eſt* 3 *tantula poteſt addi, quin compoſita ſit maior* 4. *Eoque pertinet quadratio Paraboles Archimedea.*

Sed vix adſentientur Platonici, cum ipſa omnis Geometria ſit intellectu.

Polygonorum circulo ordinatè inſcriptorum ad circulum ratio. CAPVT XVIII.

QVadrauit Parabolem Archimedes inſcriptione continuâ triangulorum exiſtentium ἐν λόγῳ ῥητῷ. Quoniam enim triangulo maximo Parabolæ inſcripto ſuperinſcripſit triangula in continuâ ratione ad maximum illud conſtanter ſubquadruplâ in infinitum, Ideò concluſit Parabolem eſſe maximi illius trianguli ſeſquitertiam. At ita circulum quadrare neſciuit Antiphon, quoniam circulo inſcripta continuè triangula exiſtunt ἐν λόγῳ ἀῤῥήτῳ, & vago. An igitur circulus non poterit quadrari. Si enim figura compoſita ex triangulis in ratione ſubquadruplá ad datum maximum triangulum conſtitutis in infinitum ſit ad idem ſeſquitertia, infinitorum aliqua ſcientia eſt. Et figura quoque plana poterit componi ex triangulis circulo in infinitum continuè inſcriptis ἐν λόγῳ, licet ἀῤῥήτῳ,& vago. Et compoſita illa ad maximum triangulum inſcriptum aliquam habebit rationem.

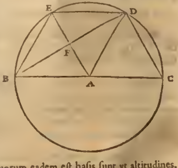
Valebunt autem Euclidæi adſerentes angulum maiorem acuto & minorem obtuſo non eſſe rectum. Circa hæc, vt liceat liberiùs philoſophari, De incerta illa & inconſtanti Polygoni cuiuſuis ordinatè inſcripti ad Polygonum infinitorum laterum, ſeu, ſi placet, Circulum, ita propono.

PROPOSITIO I.

Si eidem circulo inſcribantur duo ordinata Polygona, numerus autem laterum vel angulorum primi ſit ſubduplus ad numerum laterum vel angulorum ſecundi, Erit Polygonum primum ad ſecundum, ſicut Apotome lateris primi ad Diametrum.

Apotomem lateris voco ſubtenſam peripheriæ quam relinquit è ſemicirculo ea cui latus ſubtenditur.

In circulo igitur cuius A centrum, diameter BC, inſcribatur Polygonum quodcumque ordinatum, cuius latus ſit BD. Sectâ verò circumferentiâ BD bifariam in E ſubtendatur BE. Itaque inſcribatur aliud Polygonum ordinatum cuius latus ſit BE. Numerus igitur laterum vel angulorum Polygoni primi erit ſubduplus ad numerum laterum vel angulorum ſecundi. Connectatur autem DC. Dico Polygonum primum cuius latus BD ad Polygonum ſecundum cuius latus BE vel ED, eſſe vt DC ad BC, Iungantur enim DA ED. Conſtat igitur Polygonũ primum tot triangulis BAD quot exiſtunt latera vel anguli Polygoni primi. Polygonum autem ſecundum conſtat totidem Trapeziis BEDA. Polygonum igitur primum ad Polygonum ſecundum ſe habet, vt triangulum BAD ad Trapezium BEDA, Quodquidem Trapezium BEDA diuiditur in duo triangula BAD BED, quorum baſis communis eſt BD. Triangula autem quorum eadem eſt baſis ſunt vt altitudines. Agatur itaque ſemidiameter AE ſecans BD in F. Quoniam igitur circumferentia BD ſecta eſt bifariam in E acta AE ſecat BD ad rectos angulos. Itaque AF eſt altitudo trianguli BDA, & FE altitudo trianguli BED. Quare triangulum BAD ad triangulum BED eſt vt AF ad EF, & componendo triangulum BAD ad triangula BAD BED ſimul iuncta, id eſt Trapezium BEDA, eſt ſicut AF ad AE. Quâ adeò in ratione erit etiam Polygonum primum ad Polygonum ſecundum. Sed AF ad AE ſeu AB, eſt vt DC ad BC. Eſt enim angulus BDC rectus ſicut BFA, & ideò ſunt parallelæ AF DC. Eſt igitur Polygonum primum, cuius latus BD, ad Polygonum ſecundum, cuius latus BE vel ED, ſicut DC ad BC. Quod erat oſtendendum.



PROPOSITIO II.

Si eidem circulo inſcribantur Polygona ordinata in infinitum & numerus laterum primi ſit ad numerum laterum ſecundi ſubduplus, ad numerum vero laterum tertij ſubquadruplus, quarti ſuboctuplus, quinti ſubſexdecuplus, & eâ deinceps continuâ ratione ſubduplâ.

Erit Polygonum primum ad tertium, ſicut Planum ſub Apoto-

mis laterum Polygoni primi & ſecundi ad Quadratum à Diametro.

Ad Quartum verò ſicut Solidum ſub Apotomis laterum primi ſecundi & tertij Polygoni ad Cubum à Diametro.

Ad Quintum, ſicut Planoplanum ſub Apotomis laterum primi ſecundi tertij & quarti ad Quadratoquadratum à Diametro.

Ad Sextum, ſicut Planoſolidum ſub Apotomis laterum primi ſecundi tertij quarti & quinti Polygoni ad Quadratocubum à Diametro.

Ad Septimum, ſicut Solidoſolidum ſub Apotomis laterum primi ſecundi tertij quarti quinti & ſexti Polygoni ad Cubocubum à Diametro. Et eo in infinitum continuô progreſſu.

Sit enim Apotome lateris Polygoni Primi B, Secundi C, Tertij D, Quarti F, Quinti G, Sexti H, Et ſit Diameter circuli Z. Ex antecedente igitur propoſitione polygonum primum ad polygonum ſecundum, erit vt B ad Z. Itaque quod fit ex A in polygonum ſecundum erit æquale ei quod fit ex Z in polygonum primum polygonum verò ſecundum ad tertium, erit vt C ad Z. Et per conſequens, Quod fit ſub polygono ſecundo & B, id eſt quod fit ſub primo & Z ad id quod fit ſub polygono tertio & B, ſicut C ad Z. Quare quod fit ſub polygono primo & Z quadrato æquale eſt ei quod fit ſub polygono tertio & plano B in C. Eſt igitur polygonum primum ad polygonum tertium ſicut planum B in C ad Z quadratum. Et quod fit ſub tertio & plano B in C æquale erit ei quod fit ſub primo & Z quadrato. Rurſus ex eâdem antecedente propoſitione eſt vt polygonum tertium ad polygonum quartum ſicut D ad Z. Et per conſequens Quod fit ſub tertio & plano B in C, id eſt quod fit ſub primo & Z quadrato ad id quod fit ſub quarto & plano B in C, eſt ſicut D ad Z. Quare quod fit ſub primo & Z cubo æquale erit ei quod fit ſub quarto & ſolido B in C in D. Eſt igitur Polygonum primum ad quartum, ſicut B in C in D ad Z Cubum. Eademque demonſtrationis methodo erit ad quintum, ſicut B in C in D in F ad Z Quadratoquadratum. Ad ſextum, ſicut B in C in D in F in G ad Z Quadratocubum. Ad ſeptimum, ſicut B in C in D in F in G in H ad Z Cubocubum. Et eo conſtanti in infinitum progreſſu.

COROLLARIVM.

Itaque Quadratum circulo inſcriptum erit ad circulum ſicut latus illius Quadrati ad poteſtatem Diametri altiſſimam adplicatam ad id quod fit continuè ſub Apotomis laterum Octogoni, Hexdecagoni, Polygoni triginta duorum laterum, Sexaginta quatuor, Centum viginti octo, Ducentorum quinquaginta ſex, & reliquorum omnium in ea ratione angulorum laterumue ſubduplâ.

Sit enim Quadratum circulo inſcriptum Polygonum primum, Octogonum erit ſecundum, Hexdecagonum tertium, Polygonum triginta duorum laterum quartum. Et eo continuo ordine. Itaque erit vt Quadratum circulo inſcriptum ad polygonum extremum ſeu infinitorum laterum, ſicut Quod fit ſub Apotomis laterum Tetragoni, Octogoni, Hexdecagoni, & reliquorum omnium in ea ratione ſubduplâ in infinitum ad poteſtatem Diametri altiſſimam. Et per adplicationem communem ſicut Apotomes lateris quadrati ad poteſtatem Diametri altiſſimam adplicatam ad id quod fit ſub Apotomis laterum Octogoni, Hexdecagoni, & reliquorum omnium in ea ratione ſubduplâ in infinitum. Eſt autem Apoto-

me lateris Quadrati circulo inſcripti ipſi lateri æqualis, & polygonum infinitorum laterum circulus ipſe.

Sit circuli diameter 4. latus quadrati ei circulo inſcripti fit l 2 Quadratum ipſum 2. Apotome lateris Octogoni Radix binomia 2 + radice 2. Apotome lateris Hexdecagoni Radix binomia 2. + Radice binomia 2 + radice 2.

Apotome lateris Polygoni triginta duorum laterum.
Radix binomia 2.

+ Radice binomia { 2
{ + *radice binomia* { 2
{ + *radice* 2.

Apotome lateris Polygoni ſexaginta quatuor laterum.
Radix binomia 2

+ Radice binomia { 2
{ + *Radice binomia* { 2
{ + *radice binomia* { 2
{ + *radice* 2.

Et eo continuo progreſſu.

Sit autem Diameter 1. Circulus 1 N.

Erit $\frac{1}{2}$ *ad 1 N, ſicut Radix* $\frac{1}{2}$ *ad vnitatem adplicatam ad id quod fit ex radice binomia* $\frac{1}{2}$ *+ radice* $\frac{1}{2}$, *in Radicem binomia* $\frac{1}{2}$, *+ radice binomia* $\frac{1}{2}$, *+ radice* $\frac{1}{2}$, *in Radicem binomia* $\frac{1}{2}$, *+ radice binomia* $\frac{1}{2}$ *+ radice binomia* $\frac{1}{2}$, *+ radice* $\frac{1}{2}$ *in Radicem binomia* $\frac{1}{2}$, *+ radice binomia,* $\frac{1}{2}$ *+ radice binomia* $\frac{1}{2}$, *+ radice binomia* $\frac{1}{2}$, *+ radice* $\frac{1}{2}$. *Et eâ in infinitum methodo.*

Sit diameter X. Circulus A planum. Erit X quadratum $\frac{1}{2}$ ad A planum, ſicut L. X quadrati $\frac{1}{2}$ ad X poteſtatem maximam adplicatam ei quod fit ex radice binomiâ X quadrati $\frac{1}{2}$, + radice X quadratoquadrati $\frac{1}{2}$, in Radicem biniam X quadrati $\frac{1}{2}$, plus radice binomiæ X quadratoquadrati $\frac{1}{2}$, + radice X quadratoquadrato quadratoquadrati $\frac{1}{2}$ in radicem binomiæ X quadrati $\frac{1}{2}$, plus radice binomiæ X quadratoquadrati $\frac{1}{2}$, + radice binomiæ X quadratoquadrato quadratoquadrati $\frac{1}{2}$, + radice X quadratoquadrato quadratoquadrato quadratoquadrato quadratoquadrati $\frac{1}{2}$, in Radicem &c. in infinitum obſeruatâ vniformi methodo.

Πρόχειρον, *ſeu ad vſum Mathematici Canonis Methodica.*
CAPVT XIX.

At vos, ô nobiles ſiderum obſeruatores, miſſâ factâ matæotechniâ ad veram Cyclometriam reuoco, hoc eſt, ad legitimum Mathematici Canonis vſum. Vt enim vulgò peccatur in eius fabrica, ſic etiam in vſu. Itaque dum renouatur meus ad Canonem inſpectionum liber, Analyticæ meæ methodi, quâ ſoleo expedire me à Triangulis planis ac Sphæricis, vltrò copiam facio ad excitandum veſtra ſtudia per aliquod laborum, quos ſuſtinetis in abacis Aſtronomicis, ſuble-

ſubleuamen. Neque verò obruent vos multitudine præcepta. Totum enim negocium viginti & vno Διδόμενοις ferè abſoluo.

Διδόμενον I.

TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI
Datis angulis dantur latera in partibus Canonis.

Enimuerò ex canonicâ ſerie primâ, Perpendiculum fiet ſimile Sinui anguli acuti,
Baſis, Sinui Reliqui è recto,
Hypotenuſa, Sinui TOTO.
Vel, *ex Serie ſecundâ, Perpendiculum fiet ſimile Proſinui anguli acuti,*
Baſis, Sinui TOTO.
Hypotenuſa, Tranſſinuoſæ anguli acuti.
Vel, *denique ex ſerie Tertiâ, Perpendiculum fiet ſimile Sinui* TOTO.
Baſis, Proſinui anguli reliqui,
Hypotenuſa, Tranſſinuoſæ eiuſdem.
Vel etiam, *mixtim ex Canonis ſerie trinâ, Perpendiculum fiet ſimile differentiæ inter Tranſſinuoſam anguli acuti & ſinum Reliqui è recto,*
Baſis, Sinui acuti,
Hypotenuſa, Proſinui eiuſdem.
Vel, *Perpendiculum fiet ſimile differentiæ inter Sinum anguli acuti & Tranſſinuoſam Reliqui è recto.*
Baſis, Sinui Reliqui è recto,
Hypotenuſa, Proſinui eiuſdem.
Vel *denique, Perpendiculum fiet ſimile Tranſſinuoſæ anguli acuti,*
Baſis, Tranſſinuoſæ Reliqui è recto,
Hypotenuſa, Adgregato Proſinus acuti & Proſinus Reliqui è recto.

Διδόμενον II.

Trianguli plani Rectanguli
Datâ Hypotenuſâ ac Perpendiculo vel Baſe, dantur anguli,

Enimuerò erit vt Hypotenuſa
Ad Sinum TOTVM,
Ità Perpendiculum
Ad Sinum anguli acuti.
Et ita Baſis
Ad Sinum Reliqui è recto.
ALITER, *Erit Vt Baſis*

Ad Sinum T O T V M,
Ita Hypotenuſa
Ad Tranſſinuoſam anguli acuti.
Vel, *Vt* Perpendiculum
Ad Sinum T O T V M,
Ita Hypotenuſa
Ad Tranſſinuoſam anguli Reliqui è recto.

III.

Trianguli plani rectanguli
Datis Perpendiculo & Baſe, dantur anguli.

Enimuerò erit Vt Baſis,
Ad Perpendiculum,
Ita Sinus T O T V S,
Prosinum *Ad Sinum anguli acuti.*
Vel, *Vt Perpendiculum,*
Ad Baſim,
Ita Sinus T O T V S,
Proſinum *Ad Sinum anguli Reliqui è recto.*

IIII.

TRIANGVLI CVIVSCVMQVE PLANI
Datis angulis dantur latera in partibus Canonis.

Enimuerò latera ſunt ſimilia ſinibus quibus ea ſubtenduntur.

ALITER. *Latera trianguli ſunt ſimilia compoſitis ex Proſinibus pertinentibus ad complementa ſemiſſium, quibus ea adiacent, angulorum.*

ALITER. *Baſis trianguli fit ſimilis compoſitæ ex Proſinibus ſemiſſium, qui ad eam exiſtunt, angulorum, Crus verò vnumquodque ſimile exceſſui, quo Proſinus pertinens ad complementum dimidij anguli ad verticem, ſuperat Proſinum ipſius anguli ad baſim, cui crus idem adiacet, dimidij.*

ALITER. *Crura ſunt ſimilia Tranſſinuoſis pertinentibus ad complementa angulorum ad baſim, quibus ea adiacent. Baſis autem ſimilis differentiæ vel adgregato Proſinuum ad eadem pertinentium complementa. Adgregato videlicet cum vterque angulorum ad Baſim proponitur acutus, Differentiæ cum alter eorum obtuſus.*

V.

Trianguli cuiuſcumque plani
Datis lateribus dantur anguli.

Enimuerò, erit Vt duplum Rectangulum ſub cruribus ad differentiam inter Quadrata crurum ſimul iuncta & Quadratum baſis,

Ita Sinus TOTVS.

Ad Sinum complementi anguli ad verticem.

Et ſi quidem quadratum baſis cedat quadratis crurum ſimul iunctis erit angulus qui ad verticem exiſtit acutus, ſi præſtet, obtuſus. Sed ſi æquale fuerit, rectus.

Lemmatia Duo.

I.

Dato angulo, qui ad verticem exiſtit, datur ſumma angulorum ad Baſim.

Ea enim æqualis eſt angulo exteriori ad verticem.

II.

Datâ ſummâ angulorum ad baſim, & differentiâ eorumdem, dantur anguli ad baſim ſinguli.

Enimuerò dimidia differentia duarum magnitudinum adiecta dimidiæ ſummæ earumdem efficit magnitudinem maiorem, ablata minorem.

V.

Trianguli cuiuſcumque plani
Datis cruribus ac verticis angulo, dantur anguli ad baſim.

Enimuero, erit Vt adgregatum crurum
Ad differentiam eorumdem,
Ita Proſinus dimidiæ ſummæ angulorum ad baſim
Ad Proſinum dimidiæ differentiæ

ALITER. *Datis cruribus & verticis angulo dantur anguli ad baſim.*

Enimuerò erit Vt crus primum
Ad crus ſecundum,
Ita Tranſſinuoſa complementi anguli verticis
Ad aliam rectam,

Cuius effectæ analogæ & Proſinus complementi anguli verticis adgregatum vel differentia erit Proſinus complementi anguli a crure primo ſubtenſi.

Adgregatum videlicet cum angulus qui ad verticem exiſtit proponitur obtuſus, Differentia cum acutus.

Et hoc quidem caſu ſi Proſinus complementi anguli verticis minor fuerit facta analogâ, angulus cui crus primum ſubtenditur erit acutus, & ſi maior, obtuſus, ſed ſi æqualis, rectus.

VII.

Trianguli cuiuſcumque plani

Datis cruribus, & vno ex angulis ad baſim, datur angulus alter ad baſim.

Enimuerò dato angulo crus quod ſubtenditur intelligitor primum erit Vt crus primum.
Ad crus ſecundum,
Ita Sinus anguli dati.
Ad Sinum anguli alterius ad baſim quæſiti.

Vel erit Vt crus ſecundum.
Ad crus primum,
Itá Tranſſinuoſa complementi anguli dati
Ad Tranſſinuoſam complementi anguli quæſiti.

Cum autem is qui datur angulus fuerit acutus, ac crus primum quod ei ſubtenditur cedet ſecundo, erit adfectio anguli de quo quæretur anceps, ſi quidem crus ſecundum ad primum minorem habuerit rationem eâ quam habet Sinus TOTVS *ad ſinum anguli dati. Itaque conſtituetur eo caſu pro libito ſiue acutus quem exhibet Canon, ſiue is, quem acutus idem relinquit è duobus rectis. Vter autem adſumendus ſit non licebit definire per ea quæ proponuntur.*

VIII.

TRIANGVLI SPHÆRICI RECTANGVLI

Dato latere, quod angulo recto opponitur, ac vno ex obliquis angulo, dantur latera reliqua, ac angulus reliquus.

1 *Enimuerò erit Vt Sinus* TOTVS.
Ad Sinum lateris dati,
Ita Sinus anguli dati
Ad ſinum lateris angulo dato oppoſiti.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS.
Ad Proſinum lateris dati,
Ita Sinus complementi anguli dati,
Ad Proſinum lateris reliqui.

3 *Ac denique Vt Sinus* TOTVS.
Ad Sinum complementi lateris dati,
Ita Proſinus anguli dati
Ad Proſinum complementi anguli reliqui.

ALITER.

1 *Erit Vt Sinus* TOTVS.
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris dati,
Ita Tranſſinuoſa complementi anguli dati
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris angulo dato oppoſiti.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS.
Ad Proſinum complementi lateris dati,
Ita Tranſſinuoſa anguli dati
Ad Proſinum complementi lateris reliqui.

3 *Ac denique Vt ſinus* TOTVS.
Ad Tranſſinuoſam lateris dati,.
Ita Proſinus complementi anguli dati
Ad Proſinum anguli reliqui.

IX.

Trianguli Sphærici rectanguli
Datis duobus lateribus è quibus vnum angulo recto opponatur, datur latus reliquum, ac reliqui anguli.

1 *Enimuerò erit Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum complementi lateris angulo recto oppoſiti,
Ita Tranſſinuoſa alterius lateris dati
Ad Sinum complementi lateris reliqui.

2 *Et Vt ſinus* TOTVS
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris angulo recto oppoſiti,
Ita ~~Proſinus~~ alterius lateris dati
Ad Sinum anguli cui latus illud alterum opponitur.

3 *Ac denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum complementi lateris angulo recto oppoſiti,
Ita Proſinus alterius lateris dati
Ad Sinum complementi anguli reliqui.

ALITER.

1 *Erit Vt Sinus* TOTVS
Ad Tranſſinuoſam lateris angulo recto oppoſiti,
Ita Sinus complementi alterius lateris dati
Ad Tranſſinuoſam lateris reliqui.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum lateris angulo recto oppoſiti,
Ita Tranſſinuoſa complementi alterius lateris dati
Ad Tranſſinuoſam anguli cui latus illud alterum opponitur.

3 *Ac denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum lateris angulo recto oppoſiti,
Ita Proſinus complementi alterius lateris dati
Ad Tranſſinuoſam anguli reliqui.

X.

Trianguli Sphærici rectanguli
Datis duobus lateribus circa angulum rectum conſiſtentibus, datur latus reliquum, ac anguli reliqui.

1 *Enimuerò erit Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum complementi lateris primi dati,
Ita Sinus complementi lateris ſecundi dati
Ad Sinum complementi lateris tertij.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum complementi lateris primi dati,
Ita Sinus complementi lateris ſecundi dati
Ad Pro*ſinum complementi anguli cui datum latus primum opponitur.*

3 *Ac denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum lateris primi dati,
Ita Proſinus complementi lateris ſecundi dati
Ad Proſinum anguli cui datum latus ſecundum opponitur.

ALITER.

1 *Erit Vt Sinus* TOTVS
Ad Tranſſinuoſam lateris primi dati,
Ita Tranſinuſa lateris ſecundi dati
Ad Tranſſinuoſam lateris tertij.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum lateris primi dati,
Ita Tranſſinuoſa complementi lateris ſecundi dati
A*d* Pro*ſinum anguli cui latus primum opponitur.*

3 *Ac denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris primi dati,
Ita Proſinus lateris ſecundi dati

Ad Proſinum anguli cui latus ſecundum opponitur.

XI.

Trianguli Sphærici rectanguli

Dato vno è lateribus, quæ circa rectum angulum conſiſtunt, ac angulo cui latus idem opponitur dantur reliqua latera, ac angulus reliquus.

1 *Enimuerò erit Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum lateris dati,
Ita Proſinus complementi anguli dati
Ad Sinum lateris alterius circa rectum angulum conſiſtentis.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum lateris dati,
Ita Tranſſinuoſa complementi anguli dati
Ad Sinum lateris angulo recto oppoſiti.

3 *Denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Tranſſinuoſam lateris dati,
Ita Sinus complementi anguli dati
Ad Sinum anguli reliqui.

ALITER.

1 *Erit Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum complementi lateris dati,
Ita Proſinus anguli dati
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris alterius circa rectum angulum conſiſtentis.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris dati,
Ita Sinus anguli dati
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris angulo recto oppoſiti.

3 *Denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum complementi lateris dati,
Ita Tranſſinuoſa anguli dati
Ad Tranſſinuoſam complementi anguli reliqui.

XII.

Trianguli Sphærici rectanguli

Dato vno è lateribus, quæ circa angulum rectum conſiſtunt, &

angulo, cui latus alterum circa eundem rectum conſiſtens opponitur, dantur latera reliqua ac angulus reliquus.

1 Enimuerò erit Vt Sinus TOTVS
Ad Proſinum complementi lateris dati,
Ita Sinus complementi anguli dati
Ad Proſinum complementi lateris angulo recto oppoſiti.

2 Et Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum lateris dati
Ita Proſinus anguli dati
Ad Proſinum lateris alterius circa rectum conſiſtentis.

3 Ac denique Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi lateris dati,
Ita Sinus anguli dati
Ad Sinum complementi anguli reliqui.

ALITER.

1 Erit Vt Sinus TOTVS
Ad Proſinum lateris dati,
Ita Tranſſinuoſa anguli dati
Ad Proſinum lateris angulo recto oppoſiti.

2 Et Vt Sinus TOTVS
Ad Tranſſinuoſam complementi lateris dati,
Ita Proſinus complementi anguli dati
Ad Proſinum complementi lateris alterius circa rectum conſiſtentis.

3 Ac denique Vt Sinus TOTVS
Ad Tranſſinuoſam lateris dati,
Ita Tranſſinuoſa complementi anguli dati
Ad Tranſsinuoſam anguli reliqui.

XIII.

Trianguli Sphærici rectanguli
Datis angulis dantur latera.

1 Enimuerò erit Vt Sinus TOTVS
Ad Proſinum complementi anguli primi obliqui dati,
Ita Proſinus complementi anguli ſecundi obliqui dati
Ad Sinum complementi lateris angulo ~~tertio~~ recto oppoſiti.

2 Et Vt Sinus TOTVS
Ad Tranſsinuoſam complementi anguli primi,

Ita

Ita Sinus complementi anguli ſecundi
Ad Sinum complementi lateris angulo ſecundo oppoſiti.

3 *Ac denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum complementi anguli primi,
Ita Tranſsinuoſa complementi anguli ſecundi
Ad Sinum complementi lateris angulo primo oppoſiti.

ALITER.

1 *Erit Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum anguli primi,
Ita Proſinus anguli ſecundi
Ad Tranſſinuoſam lateris angulo tertio recto oppoſiti.

2 *Et Vt Sinus* TOTVS
Ad Proſinum anguli primi,
Ita Tranſſinuoſa anguli ſecundi
Ad Tranſſinuoſam lateris angulo ſecundo oppoſiti.

3 *Ac denique Vt Sinus* TOTVS
Ad Tranſſinuoſam anguli primi,
Ita Sinus anguli ſecundi
Ad Tranſſinuoſam lateris angulo primo oppoſiti.

XIIII.

Προσθηκίδιον.

Datâ duorum maximorum in Sphærâ circulorum inclinatione, quorum vnus ſecatur à Tertio per alterius polos, arguitur quanta ſit maxima differentia ſuarum à nodo longitudinum.

Et contrà Ex maximâ differentiâ longitudinum à nodo arguitur quanta ſit circulorum inclinatio.

Enimuero eſt Vt Sinus TOTVS *plùs Sinu complementi inclinationis, ad Sinum* TOTVM *minùs Sinu complementi inclinationis, Ita Sinus* TOTVS, *Ad Sinum differentiæ maximæ.*

Et Vt Sinus TOTVS *plùs Sinu maximæ differentiæ ad Sinum* TOTVM *minùs Sinu maximæ differentiæ, Ita Sinus* TOTVS *ad Sinum complementi inclinationis.*

Eſt autem limes velocitatis in nodo, Mediocritatis in puncto maximæ differentiæ, Tarditatis in æquidiſtantiâ à nodo.

XV.

TRIANGVLI CVIVSLIBET SPHÆRICI
Datis tribus lateribus dantur anguli.

Enimuerò latus quærendo angulo oppoſitum eſto primum. Duo igitur Rectangula ſigillatim adplicabuntur ad Sinum TOTVM, *Vnum quod ſit ſub Sinibus qui pertinent ad complementa laterum ſecundi & tertij.*

Alterum ſub Sinibus *ipſorummet laterum ſecundi & tertij.*

Et erit, Vt exiens è ſecunda adplicatione latitudo.
Ad Adgregatum vel Differentiam latitudinis ex primâ adplicatione oriundæ & Sinus complementi lateris primi,
Ita Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi anguli quæſiti.

Sumetur autem Adgregatum, cum latus illud primum fuerit minùs Quadrante circuli, latera verò ſecundum & tertium fuerint adfectionis inter ſe diuerſæ,

Vel cum latus idem primum fuerit majus Quadrante, reliqua verò adfectionis eiuſdem.

Ac Primo *quidem expoſito caſu angulus qui quæritur erit acutus, Secundo verò obtuſus.*

Contrà ſumetur differentia cum latus primum fuerit minus Quadrante, reliqua verò eiuſdem adfectionis, Qui Tertius eſt caſus. Vel cum latus idem fuerit majus Quadrante, reliqua verò diuerſæ adfectionis, Qui ſit caſus ordine Quartus.

Ac Tertio quidem caſu cum exiens è prima adplicatione latitudo erit minor Sinu complementi lateris primi erit angulus qui quæritur acutus, & cum maior, obtuſus. Contra Quarto caſu, cum exiens è prima adplicatione latitudo fuerit minor eo Sinu, erit angulus qui quæritur obtuſus, & cum major acutus. Quod ſi nulla ſit differentia argumentum erit angulum qui quæritur eſſe rectum.

Quando verò latus illud primum erit Quadrans circuli fiet compendiosè
Vt Sinus TOTVS
Ad Proſinum pertinentem ad complementum lateris ſecundi,
Ita Proſinus pertinens ad complementum tertij
Ad Sinum complementi anguli quæſiti.
Et cum latera ſecundum & tertium fuerint adfectionis eiuſdem erit obtuſus, Cum diuerſæ acutus.

At cum latera ſecundum & tertium proponentur inter ſe æqualia, Erit
Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum lateris ſecundi vel tertij,
Ita Tranſſinuoſa pertinens ad complementum dimidij lateris primi
Ad Tranſſinuoſam pertinentem ad complementum dimidij anguli quæſiti.

X V I.

Trianguli cuiuslibet Spærici
Datis tribus angulis dantur latera.

Enimuerò angulus cui latus quærendum opponitur primus è datis eſtò.
Duo igitur rectangula ſigillatim adplicabuntur ad Sinum TOTVM.
Vnum quod ſit ſub Sinibus qui pertinent ad complementa angulorum ſecundi & tertij.
Alterum ſub Sinibus qui pertinent ad angulos ipſos ſecundum & tertium.

Et erit Vt exiens è ſecunda adplicatione latitudo
Ad Adgregatum vel Differentiam latitudinis ex prima adplicatione oriundæ, & Sinus complementi anguli primi,
Ita Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi lateris quæſiti.

Sumetur autem adgregatum cum angulus ille primus fuerit obtuſus, reliqui verò adfectionis inter ſe diuerſæ.
Vel cum angulus idem primus fuerit acutus, reliqui vero eiuſdem adfectionis.
Ac Primo quidem caſu latus quæſitum erit majùs Quadrante, Secundo minùs.

Contra ſumetur differentia cum angulus ille primus fuerit obtuſus, reliqui verò eiuſdem adfectionis. Qui Tertius erit caſus.

Vel cum angulus idem primus fuerit acutus, reliqui verò adfectionis diuerſæ. Qui ſit caſus ordine Quartus.

Ac Tertio quidem caſu, cum exiens è prima adplicatione latitudo cedet Sinui complementi anguli primi latus quæſitum erit majus Quadrante, & cum præſtabit minùs.

Contrà Quarto caſu; cum exiens è primâ adplicatione latitudo cedet ei Sinui latus quæſitum erit minus Quadrante, & cum præſtabit, majùs.

Quod ſi nulla ſit differentia argumentum erit latus de quo quæritur eſſe Quadranti æquale.

Quando verò angulus ille primus fuerit rectus, fiet compendiosè
Vt Sinus TOTVS
Ad Proſinum complementi anguli ſecundi,
Ita Proſinus complementi Tertij
Ad Sinum complementi lateris quæſiti.
Et cum anguli illi ſecundus & tertius fuerint adfectionis diuerſæ erit latus quæſitum majus Quadrante, & cum eiuſdem minus.

At cum angulus ſecundus & tertius proponentur æquales; erit
Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum anguli ſecundi vel tertij,

Ita Tranſſinuoſa dimidij anguli primi
Ad Tranſſinuoſam dimidij lateris quæſiti.

X V I I.

Trianguli cuiuslibet Sphærici
Datis lateribus duobus & angulo quem ea comprehendunt dantur anguli reliqui.

Enimverò latus quærendo angulo oppoſitum eſtò è datis primum.
Duo igitur Rectangula ſigillatim adplicabuntur ad Sinum TOTVM.
Vnum quod ſit ſub Sinu complementi anguli dati, & Proſinu complementi lateris dati ſecundi.
Alterum ſub Sinu ipſius anguli dati & Tranſſinuoſâ complementi lateris dati ſecundi.

Et erit Vt exiens è ſecunda adplicatione latitudo
Ad Adgregatum vel Differentiam latitudinis ex primâ adplicatione oriundæ & Proſinu complementi lateris primi,
Ita Sinus TOTVS
Ad Proſinum complementi anguli quæſiti.

Sumetur autem Adgregatum cum latus illud primum fuerit minus Quadrante, latus verò ſecundum & angulus datus fuerint adfectionis inter ſe diuerſæ.
Vel cum latus idem primum fuerit majus Quadrante, latus verò ſecundum datum & angulus datus fuerint eiuſdem adfectionis.
Ac Primo quidem caſu angulus de quo quæritur erit acutus, Secundo obtuſus.
Contrà ſumetur Differentia cum latus illud primum fuerit minus Quadrante, latus verò ſecundum & datus angulus fuerint eiuſdem adfectionis. Qui Tertius erit caſus.
Vel cum latus primum fuerit majus Quadrante, latus vero ſecundum & datus angulus fuerint eiuſdem adfectionis. Qui ſit caſus ordine Quartus.
Ac Tertio quidem caſu, cum exiens è prima adplicatione latitudo fuerit minor proſinu complementi lateris primi, erit angulus qui quæritur acutus, & cum maior obtuſus.
Contra in Quarto caſu, cum exiens è prima adplicatione latitudo fuerit minor Proſinu complementi lateris primi erit angulus qui quæritur obtuſus, & cum maior acutus.
Quod ſi nulla ſit differentia argumentum erit angulum qui quæritur eſſe rectum.

Quando verò latus primum Quadrans erit circuli fiet compendioſè

Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi lateris ſecundi,
Ita Proſinus complementi anguli dati
Ad Proſinum complementi anguli quæſiti.
Et cum latus illud ſecundum & angulus datus fuerint eiuſdem adfectionis angulus qui quæritur erit obtuſus, Et cum diuerſæ, acutus.

At cum data latera primum & ſecundum proponentur inter ſe æqualia,
Erit Vt Sinus TOTVS
Ad Tranſſinuoſam lateris primi vel ſecundi,
Ita Proſinus complemento dimidij anguli dati congruus
Ad Proſinum anguli cui primum ſecundum-ne latus opponitur, obtuſi ſi majus Quadrante, acuti ſi minus.

XVIII.

Trianguli cuiuslibet Sphærici
Datis duobus angulis & latere quod adiacet, dantur latera reliqua.

Enimuerò angulus cui latus quærendum opponitur è datis primus eſto. Duo igitur Rectangula ſigillatim adplicabuntur ad Sinum TOTVM.

Vnum quod ſit ſub Sinu complementi lateris dati & Proſinu complementi dati anguli ſecundi.

Alterum ſub Sinu ipſius lateris dati & Tranſſinuoſa complementi eiuſdem anguli ſecundi.
Et erit Vt exiens è prima adplicatione latitudo
Ad Adgregatum vel Differentiam latitudinis ex primâ adplicatione oriundæ & Proſinus complementi anguli primi,
Ita Sinus TOTVS
Ad Proſinum complementi lateris quæſiti.

Sumetur autem Adgregatum cum angulus primus fuerit obtuſus, alter verò datus angulus & datum latus fuerint adfectionis inter ſe diuerſæ,
Vel cum is angulus primus fuerit acutus, alter verò datus angulus & datum latus fuerint eiuſdem adfectionis.
Ac Primo quidem expoſito caſu latus quæſitum erit majus Quadrante, ſecundo minus.
Contrà ſumetur differentia cum is angulus primus fuerit obtuſus, alter verò datus angulus & datum latus fuerint eiuſdem adfectionis, Qui Tertius erit caſus.

Vel cum is angulus primus fuerit acutus, alter verò datus angulus & datum latus fuerint adfectionis diuerſæ. Qui caſus ſit ordine Quartus.

Ac Tertio quidem caſu, cum exiens è prima adplicatione latitudo cedet Proſinui complementi anguli primi latus quæſitum erit majus Quadrante. Et cum præſtabit, minus.

Contrà Quarto caſu cum exiens è prima adplicatione latitudo cedet Proſinui complementi anguli primi, latus quæſitum erit minus Quadrante. Et cum præſtabit, majus.

Quod ſi nulla ſit differentia argumentum erit latus de quo quæritur eſſe Quadranti circuli æquale.

Quando verò angulus primus fuerit rectus, fiet compendiosè

Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi anguli ſecundi,
Ita Proſinus complementi lateris dati
Ad Proſinum complementi lateris quæſiti.

Et ſi angulus ſecundus & latus datum fuerint diuerſæ adfectionis, erit latus quæſitum majus Quadrante, & ſi eiuſdem. minus.

At cum dati anguli primus & ſecundus proponentur æquales

Erit Vt Sinus TOTVS
Ad Tranſſinuoſam anguli primi vel ſecundi,
Ita Proſinus dimidij lateris dati
Ad Proſinum lateris angulo primo vel ſecundo oppoſiti, ſi acuto minoris Quadrante, & ſi obtuſo, majoris.

XIX.

Datis lateribus duobus & angulo quem ea comprehendunt. datur latus reliquum.

Enimuerò duo Rectangula ſigillatim adplicabuntur ad Sinum TOTVM.
Vnum quod ſit ſub Proſinibus qui pertinent ad complementa datorum laterum.
Alterum ſub eorumdem complementorum Tranſſinuoſis.

Et erit Vt exiens è ſecundâ adplicatione latitudo
Ad adgregatum vel Differentiam latitudinis ex primâ adplicatione oriundæ, & Sinus complementi anguli dati,
Ita Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi lateris quæſiti.

Sumetur autem Adgregatum cum datus angulus fuerit acutus, data verò

latera eiuſdem inter ſe adfectionis.
Vel cum datus angulus fuerit obtuſus, data verò latera adfectionis diuerſæ.
Ac Primo quidem expoſito caſu latus quæſitum erit minus Quadrante, Secundo majus.
Contra ſumetur Differentia cum datus angulus fuerit acutus, data vero latera fuerint diuerſæ adfectionis. Qui Tertius erit caſus.
Vel cum datus angulus fuerit obtuſus, data verò latera adfectionis eiuſdem. Qui fit caſus ordine Quartus.
Ac Tertio quidem caſu cum exiens è prima adplicatione latitudo cedet Sinui complementi anguli dati latus quæſitum erit minus Quadrante, Et cum præſtabit majus.

Contrà Quarto caſu cum exiens è primâ adplicatione latitudo cedet Sinui complementi anguli dati latus quæſitum erit majus Quadrante, Et cum præſtabit, minus.

Quod ſi nulla ſit differentia argumentum erit latus de quo quæritur eſſe Quadranti circuli æquale.

Quando verò datus angulus fuerit rectus, fit compendioſè
Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi vnius datorum laterum,
Ita Sinus complementi alterius
Ad Sinum complementi lateris quæſiti.

Et ſi data latera fuerint eiuſdem adfectionis, latus quæſitum erit minus Quadrante, Et ſi diuerſæ maius.

At cum latera data proponentur æqualia,
Erit Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum lateris dati,
Ita Sinus dimidij anguli dati
Ad Sinum dimidij lateris quæſiti.

XX.

Trianguli cuiuslibet Sphærici

Datis angulis duobus & latere quod iis adiacet, datur angulus reliquus.

Enimuerò duo Rectangula ſigillatim adplicabuntur ad Sinum TOTVM.
Vnum quod fit ſub Proſinibus qui pertinent ad complementa datorum angulorum,
Alterum ſub eorumdem complementorum Tranſſinuoſis.
Et erit, Vt exiens è ſecundâ adplicatione latitudo

Ad Adgregatum vel Differentiam latitudinis ex prima adplicatione oriundæ,
& Sinus complementi lateris dati,
Ita Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi anguli quæſiti.

Sumetur autem Adgregatum cum latus datum fuerit majus Quadrante, anguli verò dati eiuſdem adfectionis.
Vel cum datum latus fuerit minus Quadrante, anguli verò dati adfectionis diuerſæ.
At Primo quidem expoſito caſu angulus qui quæritur erit obtuſus, Secundo acutus.
Contrà ſumetur Differentia cum datum latus fuerit majus Quadrante, dati verò anguli diuerſæ adfectionis. Qui Tertius erit caſus
Vel cùm latus datum fuerit minus Quadrante, dati vero anguli adfectionis eiuſdem. Qui ſit caſus ordine Quartus.
Ac Tertio caſu cùm exiens è primâ adplicatione latitudo erit minor Sinu complementi lateris dati erit quæſitus angulus obtuſus, Et cum major, acutus.
Contrà in Quarto caſu, cum exiens è prima adplicatione latitudo minor erit Sinu complementi lateris dati, angulus quæſitus erit acutus. Et cum major, obtuſus.
Quod ſi nulla ſit differentia, argumentum erit angulum de quo quæritur eſſe rectum.

Quando verò latus datum fuerit Quadranti circuli æquale, fiet compendioſè
Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum complementi vnius datorum angulorum,
Ita Sinus complementi alterius
Ad Sinum complementi quæſiti.
Et ſi anguli dati fuerint eiuſdem adfectionis angulus quæſitus erit obtuſus,
Et ſi diuerſæ, acutus.

At cum anguli dati proponentur æquales
Erit Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum anguli dati
Ita Sinus complemento dimidij lateris dati congruus
Ad Sinum complemento dimidij anguli quæſiti congruum.

X X I.

Datis duobus lateribus & angulo cui vnum ex illis lateribus opponitur datur angulus cui alterum datorum laterum opponitur.

Vel

Datis duobus angulis & latere quod alteri datorum angulorum oppo-

opponitur, datur latus reliquo oppoſitum.

Enimuerò Sinus laterum ſunt ſimiles Sinibus angulorum quibus latera opponuntur. Erit autem adfectio in primâ hypotheſi plerumque anceps.

Συντομη.

Quæ per factionem ſub ſinibus peripheriarum & adplicationem ad Sinum TOTVM exurgunt, eadem opere additionis vel ſubductionis præſtò ſunt.

1 *Enimuero Cum duæ peripheriæ angulum acutum componunt*
Eſt Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum duplum primæ,
Ita Sinus ſecundæ
Ad Sinum complementi differentiæ, minus Sinu complementi compoſitæ.

2 *Et cum componunt obtuſum, vtraque vero componentium Quadrante minor exiſtit*
Eſt Vt Sinus TOTVS
Ad Sinum duplum primæ,
Ita Sinus ſecundæ
Ad Sinum complementi differentiæ, plus Sinu complementi compoſitæ.
Aut ſi prima componentium maior eſt Quadrante, ſecunda minor

3 *Eſt Vt Sinus* TOTVS
Ad Sinum duplum primæ,
Ita Sinus ſecundæ
Ad Sinum complementi compoſitæ, minus Sinu complementi differentiæ

ALIVD.

Generaliter inuertuntur & varie concipiuntur, ac etiam ſæpenumero compendioſè abſoluuntur triangulorum tam planorum quam ſphæricorum Analogiæ.

1 *Enimuerò in comparatione ſimplicis peripheriæ,*
Eſt Vt Sinus peripheriæ
Ad ſinum TOTVM,
Ita Sinus TOTVS
Ad Tranſinuoſam complementi

2 *Et Vt Sinus complementi peripheriæ*
Ad Sinum TOTVM,
Ita Sinus TOTVS
Ad Tranſinuoſam peripheriæ.

3 *Et Vt Profinus peripheriæ*
Ad Sinum TOTVM,
Ita Sinus TOTVS
Ad Profinum complementi.

4 *Et cum proponuntur duæ peripheriæ*
Et Vt Sinus peripheriæ primæ
Ad Sinum peripheriæ ſecundæ,

Ita Tranſſinuoſa complementi ſecundæ
Ad Tranſſinuoſam complementi primæ.

5 *Et Vt Sinus complementi primæ*
Ad Sinum complementi ſecundæ,
Ita Tranſſinuoſa ſecundæ
Ad Tranſſinuoſam primæ.

6 *Et Vt Proſinus peripheriæ primæ*
Ad Proſinum peripheriæ ſecundæ,
Ita Proſinus complementi ſecundæ,
Ad proſinum complementi primæ.

7 *Rurſus eſt Vt Rectangulum ſub Sinu peripheriæ primæ, & Sinu complementi ſecundæ*
Ad Rectangulum ſub Sinu peripheriæ ſecundæ, & Sinu complementi primæ,
Ita Proſinus primæ
Ad Proſinum ſecundæ.

8 *Et Vt Rectangulum ſub Proſinu peripheriæ primæ, & Sinu ſecundæ*
Ad Rectangulum ſub Proſinu ſecundæ, & Sinu primæ,
Ita Tranſſinuoſa primæ
Ad Tranſſinuoſam ſecundæ.

9 *Et Vt Rectangulum ſub Sinu primæ & Tranſſinuoſâ eiuſdem*
Ad Rectangulum ſub Sinu ſecundæ & Tranſſinuoſâ eiuſdem,
Ita Proſinus primæ
Ad Proſinum ſecundæ.

10 *Et Vt Rectangulum ſub ſinibus duarum,*
Ad Rectangulum ſub ſinibus complementorum earumdem,
Ita Proſinus vnius
Ad Proſinum complementi alterius.

11 *Et Vt Rectangulum ſub ſinibus duarum*
Ad Rectangulum ſub Proſinibus earumdem,
Ita Sinus complementi vnius
Ad Tranſſinuoſam alterius.

12 *Et Vt Rectangulum ſub Tranſſinuoſâ complementi primæ & Sinu ſecundæ*
Ad Rectangulum ſub Proſinu complementi primæ, & differentiâ inter TOTVM *&*
Sinum complementi ſecundæ,
Ita Tranſſinnoſa primæ
Ad Proſinum complementi dimidiæ ſecundæ.

13 *Et cum proponuntur tres peripheriæ*
Eſt Vt Rectangulum quod fit ſub Sinu TOTO *& Tranſſinuoſâ primæ*
Ad id quod fit ſub Tranſſinuoſâ ſecundæ & Tranſſinuoſa tertiæ,
Ita quod fit ſub Sinu complementi ſecundæ & Sinu complementi tertiæ
Ad id quod fit ſub Sinu TOTO *& Sinu complementi primæ.*

14 *Et Vt Rectangulum quod fit ſub Sinu* TOTO *& Tranſſinuoſâ primæ*
Ad id quod fit ſub Proſinu ſecundæ & Proſinu tertiæ,
Ita quod fit ſub Proſinu complementi ſecundæ & Proſinu complementi tertiæ
Ad id quod fit ſub Sinu TOTO *& Sinu complementi primæ.*

15 *Et Vt Rectangulum quod fit ſub Sinu* TOTO *& Tranſſinuoſa primæ*

Ad id quod fit ſub Sinu ſecundæ & Tranſſinuoſâ tertiæ,
Ita quod fit ſub Tranſſinuoſâ complementi ſecundæ & Sinu complementi tertiæ
Ad id quod fit ſub Sinu T O T O *& Sinu complementi primæ.*

18 *Et Vt Rectangulum quod fit ſub Sinu* T O T O *& Proſinu primæ*
Ad id quod fit ſub Sinu ſecundæ & Proſinu tertiæ,
Ita quod fit ſub Tranſſinuoſâ complementi ſecundæ & Proſinu complementi tertiæ
Ad id quod fit ſub Sinu T O T O *& Proſinu complementi primæ*

Dati Sexti

Παρεπομπή.

Peripherias intelligo tripleuro ſphærico conſtituendo idoneas. Itaque ne ſemicirculum excedunto.

Datâ perphetiâ compoſitâ è duabus peripheriis quarum Tranſſinuoſæ datam habeant rationem, dantur ſingulæ,

1 *Enimuerò ſi compoſita minor eſt circuli Quadrante*
Erit Vt Tranſſinuoſa componentium primæ
Ad Tranſſinuoſam ſecundæ,
Ita Tranſſinuoſa complementi compoſitæ
Ad Proſinum ſecundæ, Plus Proſinu complementi compoſitæ.

2 *Et ſi compoſita maior eſt Quadrante circuli, vtraque vero componentium minor Quadrante*
Erit Vt Tranſſinuoſa primæ
Ad Tranſſinuoſam ſecundæ,
Ita Tranſſinuoſa complementi compoſitæ
Ad Proſinum ſecundæ, minus Proſinu complementi compoſitæ.

3 *Et ſi denique componentium peripheriarum prima ſit minor Quadrante, ſecunda maior,*
Erit Vt Tranſſinuoſa primæ
Ad Tranſſinuoſam ſecundæ
Ita Tranſſinuoſa complementi compoſitæ
Ad Proſinum complementi compoſitæ, minus Proſinu ſecundæ.
Et Vt Tranſſinuoſa ſecundæ
Ad Tranſſinuoſam primæ
Ita Tranſſinuoſa complementi compoſitæ
Ad Proſinum complementi compoſitæ, plus Proſinu ſecundæ.

Datâ differentiâ duarum peripheriarum quarum Tranſſinuoſæ datam habeant rationem, dantur ſingulæ.

1 *Enimuerò ſi differentia ſit maior circuli Quadrante*
Erit Vt Tranſſinuoſa differentium primæ
Ad Tranſſinuoſam ſecundæ,
Ita Tranſſinuoſa complementi differentiæ
Ad Proſinum complementi differentiæ, plus Proſinu ſecundæ.

2 *Et ſi differentia ſit minor Quadrante, differentes autem peripheriæ diuerſæ ſint ſpeciei*
Erit Vt Tranſſinuoſa primæ
Ad Tranſſinuoſam ſecundæ,

Ita Tranſinuoſa complementi differentiæ
Ad Profinum ſecundæ, minùs Profinu complementi differentiæ.

3 *Et ſi denique differentia ſit minor Quadrante, vtraque vero differentium vel minor Quadrante, vel vtraque maior. Prima autem intelligatur ea ad quam pertinet Tranſinuoſa maior*

Erit Vt Tranſinuoſa primæ
Ad Tranſinuoſam ſecundæ,
Ita Tranſinnoſa complementi differentiæ
Ad Profinum ſecundæ, minùs Profinu complementi differentiæ.

Et Vt Tranſinuoſa ſecundæ
Ad Tranſinuoſam primæ,
Ita Tranſinuoſa complementi differentiæ
Ad Profinum primæ, minùs Profinu complementi differentiæ.

I I I.

ALITER Datâ ſummâ vel differentiâ duarum peripheriarum quarum Tranſinuoſæ datam habeant rationem dantur ſingulæ

1 *Enimuerò Si vtraque peripheria proponatur minor Quadrante vel vtraque maior*
Erit Vt Adgregatum ſimilium Tranſinuoſarum
Ad differentiam earumdem,
Ita Profinus complementi dimidiæ ſummæ peripheriarum,
Ad Profinum dimidiæ differentiæ
Et ita Profinus complementi dimidiæ differentiæ
Ad Profinum dimidiæ ſummæ,

2 *Quod ſi vna è peripheriis proponitur minor Quadrante, altera maior*
Erit Vt adgregatum ſimilium Tranſinuoſarum
Ad differentiam earumdem,
Ita Profinus dimidiæ differentiæ peripheriarum
Ad Profinum complementi dimidiæ ſummæ,
Et ita Profinus dimidiæ ſummæ
Ad Profinum complementi dimidiæ differentiæ.

I I I I.

Data peripheriâ compoſitâ è duabus peripheriis quarum Sinus datam habeant rationem, dantur ſingulæ.

1 *Enimuerò Si compoſita minor eſt circuli Quadrante*
Erit Vt Sinus componentium primæ
Ad Sinum ſecundæ,
Ita Tranſinuoſa complementi compoſitæ
Ad Profinum complementi primæ, minùs Profinu complementi compoſitæ.

2 *Et ſi compoſita maior eſt Quadrante, vtraque vero componentium minor Quadrante*
Erit Vt Sinus primæ
Ad Sinum ſecundæ,
Ita Tranſinuoſa complementi compoſitæ

Ad Pro-

Ad Proſinum complementi compoſitæ, plus Proſinu complementi primæ.

3 *Et ſi denique componentium peripheriarum prima ſit minor Quadrante, ſecunda maior,*
Erit Vt Sinus primæ
Ad Sinum ſecundæ
Ita Tranſinuoſa complementi compoſitæ
Ad Proſinum complementi compoſitæ, minùs Proſinu complementi primæ
Et Vt Sinus ſecundæ
Ad Sinum primæ,
Ita Tranſinuoſa complementi compoſitæ
Ad Proſinum complementi compoſitæ, plus Proſinu ſecundæ.

V.

Datâ differentiâ duarum peripheriarum, quarum Sinus datam habeant rationem, dantur ſingulæ.

1 *Enimuerò ſi differentia ſit maior Quadrante circuli*
Erit Vt Sinus componentium primæ
Ad Sinum ſecundæ
Ita Tranſinuoſa complementi differentiæ
Ad Proſinum complementi primæ Minus Proſinu complementi differentiæ.
Cum autem prima ſumetur maior Quadrante, ſecunda ſumetur minor, & contrà.

2 *Et ſi differentia ſit minor Quadrante circuli, differentes autem peripheriæ diuerſæ ſint ſpeciei,*
Erit Vt Sinus primæ
Ad Sinum ſecundæ,
Ita Tranſinuoſa complementi differentiæ
Ad Proſinum complementi differentiæ, plus Proſinu complementi primæ
Et cum prima ſumetur maior Quadrante, altera ſumetur minor, & contrà.

3 *Et ſi denique differentia ſit minor Quadrante, vtraque verò differentium vel quadrante minor vel vtraque quadrante maior, ac prima quidem intelligatur ea cui debetur Sinus maior, ſecunda cui minor.*
Erit Vt Sinus primæ
Ad Sinum ſecundæ,
Ita Tranſinuoſa complementi differentiæ
Ad Proſinum complementi differentiæ, minùs Proſinu complementi primæ.
Et Vt Sinus ſecundæ
Ad Sinum primæ,
Ita Tranſinuoſa complementi differentiæ
Ad Proſinum complementi differentiæ, plus Proſinu complementi primæ.
Cum autem ſumetur prima minor quadrante ſumetur quoque ſecunda minor quadrante. Et contrà cum ſumetur prima maior quadrante, ſumetur quoque ſecunda maior quadrante. Itaque omni caſu ἀμφίβολον eſt Problema.

VI.

ALITER Datâ ſummâ vel differentiâ duarum peripheriarum, quarum Sinus datam habeant rationem, dantur ſingulares peripheriæ.

Enimuero ſi vtraque peripheria proponitur minor quadrante, vel vtraque maior,
Erit Vt adgregatum ſimilium Sinuum
Ad differentiam eorumdem,
Ita Proſinus dimidiæ ſummæ peripheriarum
Ad Proſinum dimidiæ differentiæ earumdem.

VEL ita Proſinus complementi dimidiæ differentiæ peripheriarum
Ad Proſinum complementi dimidiæ ſummæ.

Quod ſi vna è peripheriis proponitur minor Quadrante altera maior,
Erit Vt adgregatum Sinuum
Ad differentiam eorumdem,
Ita Proſinus dimidiæ differentiæ peripheriarum
Ad Proſinum dimidiæ ſummæ.

VEL ita Proſinus complementi dimidiæ ſummæ
Ad Proſinum complementi dimidiæ differentiæ.

DATI SEPTIMI

Παρεκτομπή.

Datâ ſummâ vel differentia duarum peripheriarum quarum Proſinus datam habeant rationem dantur ſingulæ.

Enimuerò ſi vtraque peripheria proponatur minor Quadrante, vel vtraque maior
Erit Vt adgregatum ſimilium Proſinuum
Ad differentiam eorumdem,
Ita Sinus ſummæ peripheriarum
Ad Sinum differentiæ.

VEL ita Tranſinuoſa complementi differentiæ
Ad Tranſinuoſam complementi ſummæ.

Quod ſi vna è peripheriis proponatur minor Quadrante altera maior
Erit Vt adgregatum ſimilium Proſinuum
Ad differentiam eorumdem,
Ita Sinus differentiæ peripheriarum
Ad Sinum adgregati.
VEL ita Tranſinuoſa complementi ſummæ
Ad Tranſinuoſam complementi differentiæ. Τέλος Προχείρου.

ΕΙΣ ΠΡΟΧΕΙΡΟΝ ΣΧΟΛΙΑ.

I.

Canonis Mathematici Hypotypoſis.

Ex angulis latera, vel ex lateribus angulos & mixtim in triangulis tam planis quàm ſphæricis adſequi ſumma gloria Mathematici eſt. Sic enim cælum & terras & maria felici & admirando calculo menſurat. Itaque ad eum finem paratur Canon Mathematicus quo exhibentur latera trianguli plani rectanguli æſtimata in numeris ſerie trinâ in habitudine anguli acuti ad rectum quàcumque. Deinde docet ars obliquangulorum ad rectangula, & ſphæricorum ad plana reductionem.

Latera trianguli plani rectanguli vucantur Hypotenuſa, Perpendiculum, Baſis.
Hypotenuſa dicitur latus ſubtenſum angulo recto, reliquis famoſiori.
Perpendiculum vnum è lateribus circa rectum, Baſis alterum.
E duobus angulis acutis trianguli plani rectanguli vnus acuti nomen retinet. Alter dicitur reliquis è recto. Is autem angulus Acutus intelligitur cui latus perpendiculi voce deſignatū ſubtenditur, Reliquus è recto cui baſis. Et vice verſâ latus ei angulo qui acuti voce primus exauditur ſubtenſum Perpendiculum denominatur. Latus ſubtenſum reliquo è recto, Baſis.

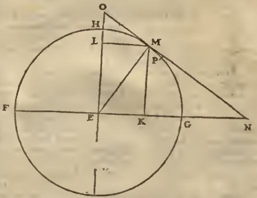
Angulus rectus datur ex ſe & conſtituitur partium xc qualium tota circumferentia circuli quæ quatuor æſtimatur rectorum adſumitur ııı^{c} ıx, vnaquæque pars rurſus ſubdiuiditur in ıx ſcrupula.

Anguli acuti vel ſui exterioris amplitudo eſt peripheria.
Differentia autem inter eam & amplitudinem anguli recti dicitur complementum, ſeu Reſidua,

Semidiameter canonica circuli datur ex ſe & conſtituitur particularum 100, 000.
Latera trianguli reliqua in vna quaque ſerie taxantur in iiſdem, per quæcumque ſcrupula quadrantis circuli congruenter.
Itaque abſoluitur totus Mathematicus Canon ter ſimilibus planis triangulis rectangulis, 2700, quot videlicet ſcrupulis conſtat dimidius angulus rectus.

Aquo ſyſtemate deinceps conuertuntur triangula, qni enim angulus dicebatur is quem acutus relinquebat è recto exinde nomen Acuti adſumit, alter ipſe nomen Reliqui è recto. Atque ideo Baſis in Perpendiculum tranſit, & viceuerſâ Perpendiculum in Baſim, vt ſolâ opus ſit vocum permutatione

Quæ vt oculis Geometrice ſubiiciantur
Exponatur circulus cuius E centrum quadriſectus à duabus diametris FEG HEI, & in quadrante circuli EH ſumatur quæcumque peripheria GM, & cadant in ſemidiametros EG EH perpendicula MK ML. Sed & tangat circulum ad M recta MN, quam continuatæ ſemidiametri EG, EH ſecent in N, O, Tria igitur in conſpicuo ſunt triangula plana rectangula ſimilia, Primum EKM ſeu MLE, Secundum EMN, Tertium OME, latus vnū EM commune habentia, quodquidem primi ſit Hypotenuſa, ſecundi Baſis, tertij Perpendiculum, quando videlicet angulus MEK, cuius amplitudinem peripheria GM definit, acuti nomine exauditur, Idemque latus commune EM conſtituitur ſemidiameter circuli. Canon igitur Mathematicus adſumit latus EM particularum 100, 000, ſectâque GH bifariam in P, promouet P punctum per quæcumque peripheriæ GH ſegmenta, ideſt ex inſtituta partitione per ſexageſima quæcumque partium quadragenarum quinarum ſcrupula, quæ ſunt loca 2700. Et totidem exhibita terna ſimilia triangula rectangula.



Punctum M mobile conſiſtit in P quoniam ab eo ſigno idem eſt progreſſus verſus H, qui regreſſus verſus G. Itaque MH conuertitur in quandam MG & vice verſâ, vt inuertenda quoque ſit ſola denominatio laterum vel angulorum.

Porro expoſitis tribus ſimilibus triangulis rectangulis EKM, EMN, OME, alia quoque in expoſito ſchemate cernuntur triangula tria ſimilia MKN, OLM, OEN, vt euidens fit ex ipsâ conſtructione.

III

Ad triangulorum planorum πραγματείαν.

[illegible] vero à triangulis planis rectangulis docet ipsi constructio: [illegible] aut triangula plana proponantur obliquangula, [illegible] [illegible] [illegible] resolventur in certo rectangula [illegible] ab angulo [illegible] ad latus [illegible] subtendit, perpendiculari; [illegible] [illegible] [illegible] datis [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] quod sufficiat ad assequendum triangula rectangula

IIII

Ad τριγώνων [illegible] sphaericorum πραγματείαν.

In [illegible] sphaericorum [illegible] [illegible] maximi circuli in [illegible]

2 Circuli appellationes [illegible] [illegible] [illegible] plane [illegible] Semicirculus, Quadrans circuli, Segmenta circularia [illegible] ἀποδεχόμενοι [illegible]

3 Angulus quem bini quique maximi circuli in [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] in circumferentia maximi circuli sub [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] quanta ab [illegible] duobus maximis circulis inter [illegible]

4. Solidus [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] latera [illegible] sphaerici, anguli solidi [illegible] in centro sphaerae

5 Itaque duo latera [illegible] [illegible] sunt maiora reliquo

6 [illegible] [illegible] latera [illegible] [illegible] sunt maiore circulo

7. [illegible] [illegible] latus maiori angulo opponitur

8 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] anguli [illegible] in centro sphaerae [illegible] [illegible] [illegible] eadem [illegible] [illegible]. Itaque quodlibet latus sphaerici trianguli [illegible] [illegible]

9. Producto [illegible] [illegible] latere angulus [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] anguli [illegible] [illegible] [illegible]

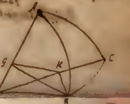
10 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] sphaerici [illegible] maximi circuli, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] lateribus et angulis est [illegible]

11 In triangulis sphaericis [illegible] [illegible] anguli [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] non [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] sphaerici [illegible] [illegible] [illegible] opponuntur angulis [illegible] [illegible] [illegible] angulorum [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] opponuntur aequalia. Et si dati duo anguli [illegible] [illegible], et data [illegible] [illegible] opponitur [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] latus angulumque [illegible] per [illegible] propositionem.

12 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] angulus [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Et si [illegible] in iis [illegible] rectangulis proponatur angulus aliquis obtusus aliquodve latus maius quadrante, minor [illegible] triangulum κατ' ἀντιπερίστασιν. Et [illegible] [illegible] [illegible] quatuor modis variari potest, ad quod [illegible] sit modi [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] angulos, qui acuti sunt, [illegible], et [illegible] quadrante minora [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] proposita [illegible] [illegible] [illegible], et [illegible]

13 Sphaerica [illegible] rectangula τεχνικῶς [illegible] [illegible] ad plana.

Sit triangulum sphaericum ABC cuius angulus ad C rectus [illegible], qui vero ad A acutus. Et [illegible] E centro sphaerae [illegible] [illegible] EA, EB, EC [illegible] AE, [illegible] plano AEB perpendicularis [illegible] BG, [illegible] [illegible] [illegible] in plano AEC [illegible] GK perpendicularis [illegible] AE. [illegible] [illegible] angulum KGB esse angulo sphaerico BAC, aequalem. [illegible] [illegible] planorum AEC, AEB [illegible] [illegible] est EA. cui [illegible] πρὸς ὀρθὰς in plano quidem AEB recta BG, [illegible] plano AEC recta KG, ideo angulus acutus BGK, [illegible] [illegible] planorum AEC, AEB. At [illegible] [illegible] plana AEC, AEB, [illegible] [illegible] [illegible] sphaericum BAC. est ergo angulus KGB angulo sphaerico BAC, aequalis. quod [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]



2°. [illegible] angulos GKB, EKB, esse rectos. [illegible] [illegible] [illegible] recta AG, [illegible] rectos [illegible] GK, GB, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ad rectos angulos [illegible], ideo planum GKB, per [illegible] [illegible] ad angulos [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible]

ſinum AG tranſit planum AEC. quare planum GKB. est ad planum AEC. rectum. ad planum vero AEC rectum est quoque planum BEC. circuli enim AC, CB, se mutuo recte secant ex hypothesi quia angulus ACB propositus rectus. Et sunt planorum GKB. BEC sectio plano AEC rectorum communis sectio est recta KB, Itaque eidem plano AEC ad rectos angulos ipsa BK insistit, et ideo ad omnes rectas lineas quae eam tangunt et in subiecto sunt plano AEC quales GK, EB, rectos angulos efficit. Sunt ergo anguli GKB, EKB recti. Quod secundo loco hic ostendendum.

14. Cum triangula sphaerica proponuntur obliquangula vel aut in [illegible] ad hoc specie; sed ex datis adquirendo, in duo triangula quemadmodum et plana resolvitur. Aut etiam proponitur obliquangulum sphaericum ad plana reducitur. Verum methodus illa [illegible] [illegible].

Resolvitur triangulum obliquangulum in duo rectangula, demissa ab aliquo angulorum ad latus quod ei oppositum perpendiculari orthogonali. Itaque circulus magnus cuius est perpendicula, ita est [illegible] educendus est per polos circuli a quo abscinditur latus anguli perpendiculo oppositum.

Curandum autem est ut ea reductio fiat ex datis trianguli [illegible], [illegible] ac [illegible] quae sufficiunt ad adsequendum triangula.

15. Si utrique angulorum ad basin trianguli sphaerici fuerint eiusdem adfectionis, perpendiculum ab angulo verticis ad basin demissa cadet intra triangulum, sed si diversae, extra.

16. Si crura trianguli sphaerici fuerint maiora quadrante circuli, basis vero quadrans aut quadrante maior, angulus erit [illegible].

17 Si trianguli sphaerici tres anguli fuerint acuti, latera quoque minora erunt quadrante circuli

18 Sit triangulum sphaericum ABD [illegible] perpendiculum BD cadat segmentum orthogonii [illegible]



Primum dico esse ut [illegible] anguli BAC ad [illegible] anguli DAC, [illegible] perpendiculi AB ad [illegible] perpendiculi ADC

Secundo dico esse [illegible] perpendiculi CB, ad [illegible] perpendiculi CD, sicut [illegible] perpendiculi AB, ad [illegible] perpendiculi AD.

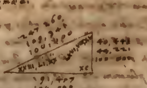
Tertio dico esse sinum CD ad sinum CB, sicut [illegible] anguli B, ad [illegible] anguli D.

Denique et quarto Dico esse sinum anguli BAC, ad sinum anguli DAC, sicut [illegible] anguli B. ad [illegible] anguli D.

V

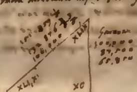
TRIANGVLORVM Aliquae constitutiones ad Comprobandam exempli Praecepta.

1. Canonicum TRIANGVLVM. PLANVM RECTANGVLVM obliquitatis sphaerae quanta deprehensa est ab Hipparcho Eratosthene et Ptolemaeo.



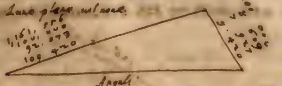
2. CANONICVM TRIANGVLVM. PLANVM RECTANGVLVM Elevationis poli supra Horizontem Parisiensem.

Parisiis observavimus, die Aequinoctii Vmbra Meridiana deprehenderit Gnomonis [illegible]



3. TRIANGULI PLANI CATASCEUE AD PROSTAPHÆRESES

Lunæ plenæ vel novæ.



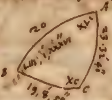
A. Anomalia μέση à limite velocitatis

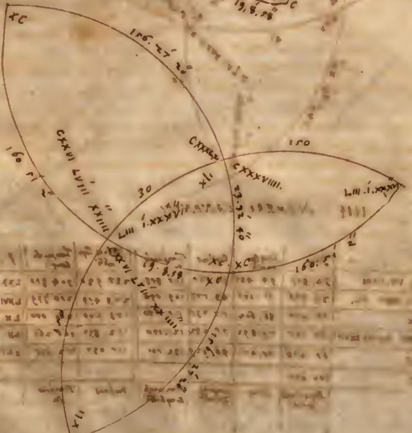
B. Prostaphæresis

D. Anomalia φαινομένη à limite tarditatis

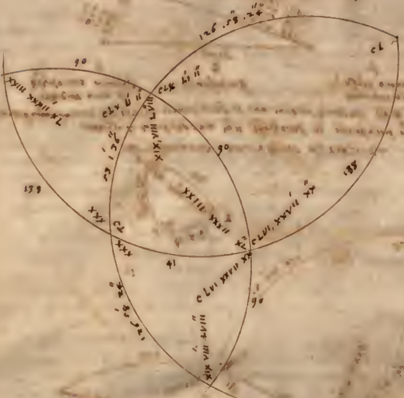
Ratio AB ad AD constituit ut sinus totus ad sinum partium IIII,LVI cum dimidi quanta desiderat maxima prostaphæresis ἐν συνόδοις καὶ πανσελήνοις est observata

4 TRIPLEURUM SPHÆRICUM RECTANGULUM.





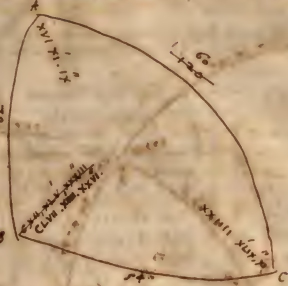
III. IDEM INVERSUM PER ENALLAGEN



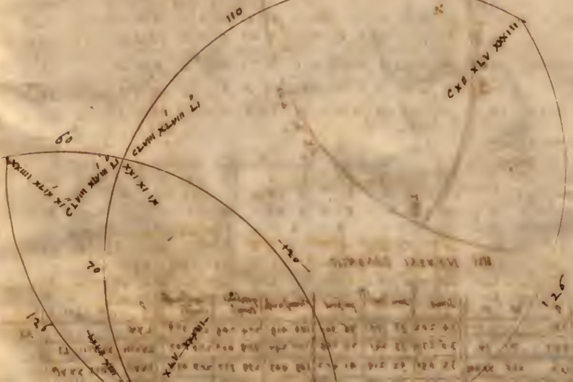
IIII NUMERI CANONICI.

	P ' ''	Sinus	Sinus Complementi	Prosinus	Transsinuosa	Prosinus Complementi	Transsinuosa Compl:	P. ' ''	
CB	XIX. VIII. LVIII	32,803	94 467	34.725	105 958	287 980	304 850	LXX. LI. II	
AC	XXIIII XXXII XL.	39 946	91.675	43,573	109.090	229 499	250 339	LXVI XXVII XX	
AB	XXX	50 000	86.602	57 735	115 470	173.200	200 000	LX	
	XXXVI LVIII XXIIII	60 145	79.892	75 282	125.170	132,833	166 266	LII II XXXVI	B
A	XLI	65 606	75.471	86 929	132 501	115.037	152 425	XLIX	
C	XC	100 000							
		Sinus Complementi	Sinus	prosinus complementi	Transsinuosa complementi	prosinus	Transsinuosa		

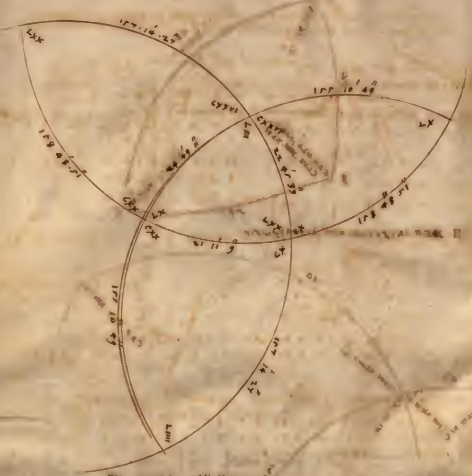
5. TRIPLEVRUM SPHÆRICUM. OBLIQUANGULUM



II. IDEM INVERSUM κατ' ἀνταπλήρωσιν.



III IDEM INVERSVM PER ENALLAGEM πλευρογωνικὴν

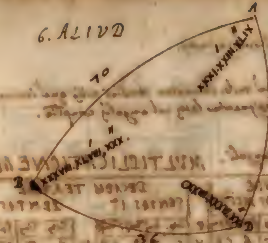


IIII NVMERI CANONICI

	°	'	''	Sinus	Sinus Compl.	prosinus	Transsinuosa	prosinus Compl.	Transsinuosa Compl.	°	'	''	
	XX			34 202	93 969	36 397	106 418	274 748	292 379	LXX			AB
A	XXI	XI	IX	36 139	93 241	38 758	107 247	258 006	276 707	LXVIII	XLVIII	LI	
B	XXII	XLV	XXXIII	38 686	92 214	41 952	108 443	238 337	258 493	LXVII	XIIII	XXVII	
D	XXIIII	XLIX	XI	41 977	90 863	46 248	110 179	216 223	238 229	LXV	X	XLIX	
	XXX			50 000	86 602	57 735	115 470	173 205	200 000	LX			AD
	XXXVI			58 779	80 902	72 654	123 607	137 638	170 130	LIIII			BD
				Sinus Complementi	Sinus	prosinus Compl.	Transsinuosa Compl.	prosinus	Transsinuosa				

IV

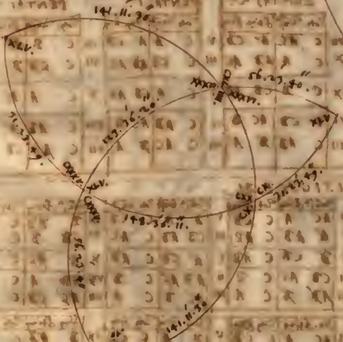
6. ALIVD



II. IDEM INVERSUM [illegible]



III. IDEM INVERSUM PER ENALLAGEN [illegible]



VI.

Canonica Analogia Triangulorum Sphæricorum in notis.



Canonicas Sphæricorum Triangulorum Analogias, recensere, ac ne earum mole obruantur studiosi potius quam iuventur, eas in notis ad parationem usum gestibus. Notas autem radiatione designantur latus vel angulos complementa.

AD OPUS PER Canonica Analogia Triang: Rectanguli. MULTIPLICATIONEM.

DECADIS PRIMAE (PENTAS PRIMA, PENTAS SEC.) — DECADIS SECUNDE (PENTAS PRIMA, PENTAS SECUNDA) — DECADIS TERTIAE (PENTAS 1.ª, PENTAS 2.ª)

C	AB	A	CB	VI	C	AC	B	CB	III	C	AC	AB	CB	VII	C	AC	A	CB	V	C	B	A	CB	IX	C	B	AB	CB
C	AB	B	AC	VII	C	CB	A	AC	IIII	C	A	B	AC	X	C	A	AB	AC	III	C	CB	AB	AC	VI	C	CB	B	AC
C	CB	AC	AB	VIII	C	B	A	AB	II	C	B	AC	AB	IX	C	B	CB	AB	I	C	A	CB	AB	X	C	A	AC	AB
C	AC	A	B	IX	C	AB	CB	B	V	C	CB	A	B	VI	C	CB	AC	B	II	C	AB	AC	B	VIII	C	AB	A	B
C	CB	B	A	X	C	AB	AC	A	I	C	AB	CB	A	VIII	C	AB	B	A	IIII	C	AC	B	A	VII	C	AC	CB	A

HYPODECADIS PRIMAE (PENTAS 1.ª, PENTAS 2.ª) — HYPODECADIS SECUNDE (PENTAS 1.ª, PENTAS 2.ª) — HYPODECADIS TERTIAE (PENTAS 1.ª, PENTAS 2.ª)

C	AB	A	CB	VI	C	AC	B	CB	III	C	AC	AB	CB	VII	C	AC	A	CB	V	C	B	A	CB	IX	C	B	AB	CB
C	AB	B	AC	VII	C	CB	A	AC	IIII	C	A	B	AC	X	C	A	AB	AC	III	C	CB	AB	AC	VI	C	CB	B	AC
C	CB	AC	AB	VIII	C	B	A	AB	II	C	B	AC	AB	IX	C	B	CB	AB	I	C	A	CB	AB	X	C	A	AC	AB
C	AC	A	B	IX	C	AB	CB	B	V	C	CB	A	B	VI	C	CB	AC	B	II	C	AB	AC	B	VIII	C	AB	A	B
C	CB	B	A	X	C	AB	AC	A	I	C	AB	CB	A	VIII	C	AB	B	A	IIII	C	AC	B	A	VII	C	AC	CB	A

AD OPUS PER DIVISIONEM.

AB	A	C	CB	VI	AC	B	C	CB	III	AC	AB	C	CB	VII	AC	A	C	CB	V	B	A	C	CB	IX	B	AB	C	CB
AB	B	C	AC	VII	CB	A	C	AC	IIII	A	B	C	AC	X	A	AB	C	AC	III	CB	AB	C	AC	VI	CB	B	C	AC
AC	CB	C	AB	VIII	B	A	C	AB	II	B	AC	C	AB	IX	B	CB	C	AB	I	A	CB	C	AB	X	A	AC	C	AB
AC	A	C	B	IX	AB	CB	C	B	V	CB	A	C	B	VI	CB	AC	C	B	II	AB	AC	C	B	VIII	AB	A	C	B
CB	B	C	A	X	AB	AC	C	A	I	AB	CB	C	A	VIII	AB	B	C	A	IIII	AC	B	C	A	VII	AC	CB	C	A

AB	A	C	CB	VI	AC	B	C	CB	III	AC	AB	C	CB	VII	AC	A	C	CB	V	B	A	C	CB	IX	B	AB	C	CB
AB	B	C	AC	VII	CB	A	C	AC	IIII	A	B	C	AC	X	A	AB	C	AC	III	CB	AB	C	AC	VI	CB	B	C	AC
AC	CB	C	AB	VIII	B	A	C	AB	II	B	AC	C	AB	IX	B	CB	C	AB	I	A	CB	C	AB	X	A	AC	C	AB
AC	A	C	B	IX	AB	CB	C	B	V	CB	A	C	B	VI	CB	AC	C	B	II	AB	AC	C	B	VIII	AB	A	C	B
CB	B	C	A	X	AB	AC	C	A	I	AB	CB	C	A	VIII	AB	B	C	A	IIII	AC	B	C	A	VII	AC	CB	C	A

Alitor, AD OPUS PER DIVISIONEM.

A	AB	C	CB	VI	B	AC	C	CB	III	AB	AC	C	CB	VII	A	AC	C	CB	V	A	B	C	CB	IX	AB	B	C	CB
B	AB	C	AC	VII	A	CB	C	AC	IIII	B	A	C	AC	X	AB	A	C	AC	III	AB	CB	C	AC	VI	B	CB	C	AC
CB	AC	C	AB	VIII	A	B	C	AB	II	AC	B	C	AB	IX	CB	B	C	AB	I	CB	A	C	AB	X	AC	A	C	AB
A	AC	C	B	IX	CB	AB	C	B	V	A	CB	C	B	VI	AC	CB	C	B	II	AC	AB	C	B	VIII	A	AB	C	B
B	CB	C	A	X	AC	AB	C	A	I	CB	AB	C	A	VIII	B	AB	C	A	IIII	B	AC	C	A	VII	CB	AC	C	A

A	AB	C	CB	VI	B	AC	C	CB	III	AB	AC	C	CB	VII	A	AC	C	CB	V	A	B	C	CB	IX	AB	B	C	CB
B	AB	C	AC	VII	A	CB	C	AC	IIII	B	A	C	AC	X	AB	A	C	AC	III	AB	CB	C	AC	VI	B	CB	C	AC
CB	AC	C	AB	VIII	A	B	C	AB	II	AC	B	C	AB	IX	CB	B	C	AB	I	CB	A	C	AB	X	AC	A	C	AB
[illegible]	AC	C	B	IX	CB	AB	C	B	[illegible]	A	CB	C	B	VI	AC	CB	C	B	II	[illegible]	[illegible]	C	B	VIII	A	AB	C	B

Canonica Analysis Sphærici Trianguli Obliquanguli.

Vt ex Lateribus, Anguli.

	Sinus Sinum	TOTUS Sinus / Sinum Sinum	TOTUS	Sinus
I	AD in AB	C in B̸D̸ =+ue A̸D̸ in A̸B̸	C	A̸
II	AB in BD	C in A̸D̸ =+ue A̸D̸ in B̸D̸	C	B̸
III	BD in AD	C in A̸D̸ =+ue B̸D̸ in A̸D̸	C	D̸

Vt ex Angulis, Latera.

IIII	B in D	C in A̸ =+ue B̸ in D̸	C	B̸D̸
V	D in A	C in B̸ =+ue D̸ in A̸	C	A̸D̸
VI	A in B	C in D̸ =+ue A̸ in B̸	C	A̸B̸

Vt ex Cruribus & Angulo verticis, Anguli ad basim.

	Sinus Transf.	TOTUS Sinus / Prosinum Prosinum	TOTUS	Prosinus
I	A̸ in A̸D̸	C in A̸B̸ =+ue A̸ in A̸D̸	C	D̸
II	A̸ in A̸B̸	C in A̸D̸ =+ue A̸ in A̸B̸	C	B̸
III	B̸ in A̸B̸	C in B̸D̸ = [illegible]	C	A̸

Vt ex Cruribus et Angulo verticis, Basis

	Transf. Transf.	TOTUS Prosinus / Sinum Sinum	TOTUS	Sinus
I	A̸B̸ in A̸D̸	C in A̸ =+ue A̸B̸ in A̸D̸	C	B̸D̸
II	B̸D̸ in A̸B̸	C in B̸ =+ue B̸D̸ in A̸B̸	C	A̸D̸
III	A̸D̸ in B̸D̸	C in D̸ =+ue A̸D̸ in B̸D̸	C	A̸B̸

Vt ex Angulis ad basim et Base, Ang.us verticis

IIII	D̸ in B̸	C in B̸D̸ =+ue D̸ in B̸	C	A̸
V	A̸ in D̸	C in A̸B̸ =+ue A̸ in D̸	C	B̸
VI	B̸ in A̸	C in AB =+ue B̸ in A̸	C	D̸

Vt ex Angulis ad basim et Crure, Crus alterum. Vel ex Cruribus et uno Angulorum ad basim, Angulus alter ad basim.

Sinus	Sinus	Sinus	Sinus	Sinus	Sinus
A	BD	B	AD	D	AB

Sequitur postea Caput XX
de [illegible]